

SÉRIE A, N° 2026

N° D'ORDRE : 2893

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean ABELÉ

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE D'UN SYSTÈME OSCILLANT ENTRETENU A AMPLITUDE
AUTOSTABILISÉE ET APPLICATION A L'ENTRETIEN D'UN PENDULE
ÉLASTIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1943 devant la Commission d'examen.

MM. VILLAT, *Président.*
CROZE, }
ROCARD, } *Examineurs.*



TOULOUSE

ÉDOUARD PRIVAT, Libraire-Éditeur

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS, 14

—
1943

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyens honoraires. . . . M. MOLLIARD.

CH. MAURAIN.

Doyen. P. MONTEL, *Professeur*, Théorie des fonctions.

Professeurs honoraires	LÉON BRILLOUIN.	G. BERTRAND.	CAULLERY.
	AUGER.	CH. FABRY.	CARTAN.
	DANGEARD.	LÉON BERTRAND.	E. BOEIL.
	LESPIEAU.	WINTREBERT.	A. COTTON.
	VESSIOT.	DUBOSCQ.	J. DRACH.
	PORTIER.	BOHN.	M. GUICHARD.
	LAPICQUE.	RABAUD.	LABROUSTE.

Professeurs :

Charles PÉREZ. . . .	T Zoologie.	M. CURIE.	Physique (P. C. B.).
L. BLARINGHEM . . .	T Botanique.	G. RIBAUD	T Hautes températures.
G. JULIA	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	CHAZY	T Mécanique rationnelle.
C. MAUGUIN	T Minéralogie.	GAULT	T Chimie (P. C. B.).
A. DENJOY	T Géométrie supérieure.	CROZE.	T Physique théorique et physique céleste.
L. LUTAUD.	T Géographie physique et géologie dynamique.	DUPONT	T Théories chimiques.
G. BRUHAT	T Physique.	VALIRON	T Calcul différentiel et intégral.
E. DARMOIS.	T Enseignement de Physique.	BARRABÉ	Géologie structurale et Géologie appliquée.
A. DEBIERNE.	T Physique générale et Radioactivité.	MILLOT.	Biologie animale (P. C. B.).
L. DUNOYER	T Chimie physique.	F. PERRIN	Théories physiques.
M. JAVILLIER	T Chimie biologique.	VAXON	T Analyse et mesures chimiques.
Henri VILLAT	T Mécanique des fluides et applications.	G. DARMOIS.	T Mathématiques générales.
Ch. JACOB.	T Géologie.	CHATTON	T Biologie maritime.
P. PASCAL	T Chimie générale.	AUBEL	Chimie biologique.
M. FRÉCHET	T Calcul des probabilités et Physique mathématique.	J. BOURCART.	Géographie physique et Géologie dynamique.
E. ESCLANGON. . . .	T Astronomie.	M ^{me} JOLIO-CURIE.	Physique générale et Radioactivité.
H. BÉGHIN	T Mécanique physique et expérimentale.	PLANTEFOL	T Botanique.
FOCH	T Mécanique expérimentale des fluides.	CABANNES	T Recherches physiques.
PAUTHENIER	T Electrotechnique générale.	GRASSÉ	T Zoologie (Evolution des êtres organisés).
DE BROGLIE	T Théories physiques.	PRÉVOST	Chimie organique.
CHRÉTIEN.	Optique appliquée.	BOULIGAND	Mathématiques.
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparées.	CHAUDRON	Chimie (P. C. B.).
VILLEY.	Mécanique physique et expérimentale.	WYART.	Minéralogie.
COMBES	T Physiologie végétale.	TEISSIER	Zoologie.
GARNIER.	T Application de l'analyse à la Géométrie.	MANGENOT.	Biologie végétale (P. C. B.).
PÉRES.	T Mécanique rationnelle.	P. AUGER.	Physique.
HACKSPILL.	T Chimie minérale.	MONNIER	Physiologie générale.
TOUSSAINT.	Technique Aéronautique.	PIVETEAU.	Géologie.
		ROCARD	Physique.
		H. CARTAN.	Calcul différentiel.
		SCHAEFFER	T Physiologie générale.
		LAFFITTE.	Chimie (P. C. B.).

Secrétaire A. PACAUD.

Secrétaire honoraire. . . . D. TOMBECK.

SÉRIE A, N° 2026

N° D'ORDRE : 2893

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean ABELÉ

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE D'UN SYSTÈME OSCILLANT ENTRETENU A AMPLITUDE
AUTOSTABILISÉE ET APPLICATION A L'ENTRETIEN D'UN PENDULE
ÉLASTIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1943 devant la Commission d'examen.

MM. VILLAT, *Président.*

CROZE,

ROCARD,

} *Examinateurs.*



TOULOUSE

ÉDOUARD PRIVAT, Libraire-Éditeur

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS, 14

1943



A Monsieur CAMILLE GUTTON

Membre de l'Institut.

Respectueux hommage.

J. A.

Étude d'un système oscillant entretenu à amplitude autostabilisée et application à l'entretien d'un pendule élastique.

INTRODUCTION

1. Un système oscillant entretenu est essentiellement constitué par l'adjonction à un oscillateur — soit mécanique : pendule de gravité, poids suspendu à un ressort hélicoïdal..., soit électrique : circuit composé d'une bobine d'inductance et d'un condensateur — d'un *dispositif d'entretien*.

Ce dispositif comprend : 1° une source d'énergie de fréquence nulle, c'est-à-dire n'imposant au système oscillant aucune fréquence particulière; 2° un organe distributeur — échappement d'horloge, relais à lampes électroniques... — chargé de fournir au système oscillant une puissance périodiquement variable au rythme de sa fréquence propre, dans le but de compenser les pertes dues aux causes naturelles d'amortissement.

Supposons le système oscillant régi par l'équation classique :

$$(1) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\alpha \frac{dz}{dt} + sz = 0,$$

l'adjonction à ce système du dispositif d'entretien peut se traduire, si la force d'entretien est en exacte opposition de phase avec la vitesse, par l'introduction dans le coefficient de $\frac{dz}{dt}$ d'un terme soustractif et l'équation (1) devient :

$$(2) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} + 2(\alpha - \beta) \frac{dz}{dt} + sz = 0.$$

2. On peut concevoir qu'à chaque instant la puissance fournie compense exactement la puissance dissipée. Cela revient à poser :

$$(3) \quad \alpha = \beta,$$

le terme en $\frac{dz}{dt}$ disparaît et tout se passe alors comme si le système oscillant était dépourvu d'amortissement, le dispositif d'entretien ayant pour effet d'introduire un *amortissement négatif* annulant l'amortissement positif.

L'oscillation est rigoureusement sinusoïdale et sa fréquence est la fréquence propre du système oscillant supposé sans amortissement. L'amplitude n'est pas déterminée et ne dépend que des conditions initiales.

3. Ce régime d'entretien est précaire. Les grandeurs physiques représentées par les coefficients α et β sont sujettes, comme toute grandeur physique, à des fluctuations, plus ou moins amples, plus ou moins lentes, jamais rigoureusement nulles.

Si la différence $\alpha - \beta$ devient positive, l'oscillation devient exponentiellement décroissante et l'amplitude tend vers zéro. Si $\alpha - \beta$ devient négatif l'amplitude croît sans limite.

Toutefois le caractère irréel de cette dernière conclusion nous avertit qu'il doit y avoir dans tout dispositif d'entretien des causes intrinsèques limitatrices de l'amplitude. Le coefficient β ne saurait rester constant, mais doit subir une diminution périodique (par exemple au voisinage du maximum et du minimum de z) croissant avec l'amplitude. C'est ce que montre, dans le cas des lampes électroniques, l'examen de leurs courbes caractéristiques.

Il est aisé de comprendre comment cette circonstance permet d'obtenir des oscillateurs à la fois *autoamorçants* et *stables*.

Réglons l'organe distributeur de façon à ce que, pour les faibles amplitudes, β soit légèrement supérieur à α . La moindre perturbation de l'état de repos fera naître de petites oscillations dont l'amplitude ira en croissant exponentiellement jusqu'à ce que devienne sensible la diminution périodique de

β. La croissance de l'amplitude sera alors ralentie, puis un régime stationnaire sera atteint lorsque, β devenant périodiquement inférieur à α, la différence α — β, tour à tour positive et négative, sera nulle en moyenne au cours de chaque période.

L'amplitude de régime est déterminée et stable, car si une perturbation l'augmente ou la diminue la valeur moyenne de β varie en sens contraire et, α restant constant, la valeur moyenne d'α — β varie dans le même sens, ce qui a pour effet de ramener l'amplitude à sa valeur primitive.

Par contre : 1° les oscillations ne sont plus sinusoïdales; 2° leur fréquence fondamentale n'est plus en général la fréquence propre du système sans amortissement, elle est plus ou moins modifiée par suite de la variation périodique de β et dépend des caractéristiques du système d'entretien.

En principe les harmoniques sont d'autant plus nombreux et la fréquence est d'autant plus dépendante de l'entretien que celui-ci est plus stable.

4. Lorsque le système oscillant est destiné à servir d'horloge ou d'étalon de fréquence on peut estimer que la stabilité ainsi obtenue est payée trop cher et songer à reviser les conditions du contrat.

Un mécanisme régulateur chargé d'assurer la constance d'une certaine grandeur devrait n'entrer en action que lorsque cette constance est compromise et cesser d'agir dès qu'elle est rétablie. Celui que nous venons de décrire fonctionne sans cesse, puisqu'il repose sur une variation périodiquement renouvelée de β. Le contrat n'est pas avantageux.

Si la variation de β est périodique c'est que par l'organe distributeur nous avons rendu β fonction de la valeur instantanée de z. Il serait plus logique de rendre β fonction de la valeur instantanée de l'amplitude de z.

Les moyens techniques pour cela ne font pas défaut. Ce sont, à peu de chose près, ceux qui sont mis en œuvre dans les régulateurs « antifading » utilisés dans les appareils de réception radioélectrique. Ici la régulation, qui permet d'obtenir une amplitude de sortie presque constante malgré de fortes variations de l'amplitude d'entrée, est obtenue par un changement de polarisation des lampes amplificatrices à pente va-

riable sous l'action de la tension de sortie d'un détecteur. Des adaptations de ce procédé à un système d'entretien sont faciles à imaginer et plusieurs ont, de fait, été proposées [2] [5].

5. Cependant la théorie est en retard sur la technique. Non seulement le système d'entretien dont nous venons d'énoncer le principe n'a pas encore été à notre connaissance mis en équation, mais, à en croire un des auteurs qui l'ont proposé, cette mise en équation se heurterait à d'insurmontables difficultés.

Voici en effet ce qu'écrit Arguimbau du dispositif qu'il décrit sous le nom, d'ailleurs équivoque et que nous n'adopterons pas, d'*oscillateur linéaire*.

« Dans le cas de l'oscillateur linéaire il convient de faire usage du concept physique d'amplitude instantanée d'une fonction périodique... L'amplitude instantanée peut être décrite comme la valeur maxima durant chaque cycle de haute fréquence de la fonction périodique; on suppose que la variation relative de la valeur de ce maximum, d'un cycle au suivant, est très faible.

Ce concept permet de considérer la tension issue du détecteur comme une fonction de l'amplitude et l'amortissement est ainsi rendu dépendant de l'amplitude. On pensera que l'introduction de l'idée d'amplitude instantanée, quantité qu'il est malaisé d'exprimer analytiquement, entraînera des difficultés et c'est le cas. Les méthodes classiques procédant par équations différentielles ne sont pas directement applicables au cas d'un circuit d'accord dont l'amortissement est fonction de l'amplitude » [2].

On ne doit donc pas s'étonner que dans les exposés théoriques relatifs aux systèmes autoentretenus le dispositif d'entretien à amortissement fonction de l'amplitude soit ou omis ou relégué à un rang secondaire. C'est ainsi que dans le traité de Barkhausen sur les Tubes à vide le procédé de limitation de l'amplitude par effet détecteur n'est présenté que comme un *moyen artificiel* de renforcer les causes intrinsèques de limitation [3].

6. Il nous a paru qu'il y avait là une lacune à combler et nous en avons particulièrement senti le besoin lorsque nous

avons essayé d'adapter ce système d'entretien à un pendule élastique, en vue de la mesure du temps. Telle est l'origine des deux parties, théorique et expérimentale, du présent travail.

Pour justifier l'ordre suivi dans la première partie, rappelons brièvement par quelles étapes s'est formée la théorie des systèmes autoentretenus.

On peut les ramener à deux principales que nous désignerons, à la suite de van der Pol [14], sous les noms de *théorie linéaire* et *théorie non-linéaire* des systèmes autoentretenus.

La théorie linéaire recherche les conditions auxquelles doit satisfaire un oscillateur donné pour que l'autoentretien soit possible. Ces conditions se déduisent d'équations telles que (2) en y déterminant les coefficients α et β en fonction des constantes expérimentales et en posant : $\alpha = \beta$. Dans la mesure où cette égalité reste vérifiée au cours du fonctionnement de l'oscillateur, le mécanisme de l'autoentretien est représenté par des équations *linéaires* à coefficients constants.

La théorie non-linéaire se propose d'appliquer les ressources du calcul infinitésimal au problème plus complexe de la *stabilité* des oscillations. La stabilité est essentiellement liée, nous l'avons vu, aux variations du coefficient β , et ces variations ne peuvent être représentées par des fonctions connues du temps, puisqu'il s'agit non de synchronisation mais d'auto-entretien. Les équations représentant le fonctionnement *stable* d'un oscillateur autoentretenu ne peuvent donc être que des équations *non-linéaires*.

Les principes de la théorie linéaire étant communs à tous les systèmes entretenus, il ne saurait être question de les rappeler ici et nous ne pouvons que renvoyer aux traités de radioélectricité [6, 7, 11, 12].

La théorie non-linéaire est de date plus récente et moins connue. Aussi croyons-nous utile d'en résumer les points fondamentaux. Ce résumé fera l'objet du premier chapitre de la première partie de notre travail. Nous proposerons ensuite, en partant de considérations énergétiques, une généralisation de l'équation de Liénard (ch. II) et nous serons alors en mesure de donner une expression analytique de l'amplitude instantanée (ch. III). Cette expression nous permettra, en écrivant que le coefficient d'amortissement est une fonction croissante de l'amplitude instantanée, de former l'équation différentielle

d'un oscillateur à amplitude autostabilisée (ch. iv). La discussion de cette équation montrera que ce système d'entretien permet d'engendrer des oscillations *sinusoïdales stables* (ch. v) et son intégration au voisinage du *cercle limite* permettra d'étudier les *fluctuations de l'amplitude* et leur répercussion sur la marche d'un garde-temps (ch. vi).

Nous étudierons dans la seconde partie la technique de ce système d'entretien en l'appliquant à un pendule élastique. Nous prions le lecteur de ne voir dans cette seconde partie de notre travail qu'une simple application, parmi beaucoup d'autres possibles, des principes exposés dans la première. Nous ne prétendons point apporter une contribution immédiate à la chronométrie et une expérimentation prolongée de notre pendule sera sans doute nécessaire pour juger des services qu'il peut rendre. Le principal intérêt de notre étude technique est de *montrer réalisées les hypothèses avancées dans notre étude théorique*. Aussi seront seuls décrits en détail les appareils et les procédés mis en œuvre en vue de réaliser ces hypothèses et seuls seront consignés les résultats des mesures faites pour les vérifier.

En éclairant le mécanisme de l'entretien sans perturbation d'une oscillation sinusoïdale à la lumière d'une définition précise et féconde de la notion d'amplitude instantanée, puis en montrant ce mécanisme en *fonctionnement effectif*, nous croyons préparer les voies à la solution de plus d'un problème. Celui de la mesure du temps est d'ailleurs la meilleure épreuve que nous puissions tenter du système d'entretien que nous préconisons, car on sait à quelle précision cette mesure a déjà été portée.

7. Il nous reste à justifier le titre que nous donnons à notre travail en disant pourquoi nous n'adoptons pas la dénomination d'*oscillateur linéaire* employée par Arguimbau. Le titre complet de son mémoire est : « Oscillateur ayant une caractéristique de fonctionnement linéaire ». On peut le justifier partiellement au moyen des considérations suivantes.

L'organe distributeur d'un dispositif d'entretien, une lampe triode par exemple, a son fonctionnement représenté par des courbes caractéristiques qui possèdent en général un point d'inflexion. Supposons que ce point corresponde au régime

continu autour duquel se produisent les oscillations. Pour qu'il y ait amorçage spontané il faut que la pente de la tangente à la courbe au point d'inflexion soit telle que l'amortissement soit légèrement négatif. Cette condition est commune à tous les systèmes d'entretien.

C'est par la cause de la stabilité que les systèmes se différencient.

Dans le système classique la stabilité provient de ce que le point de fonctionnement atteint aux grandes amplitudes les régions courbes de la caractéristique. Il en résulte, par suite de la variation périodique de pente, une variation périodique de l'amortissement instantané qui devient positif au voisinage des maxima et des minima de la fonction oscillatoire. Le régime stationnaire est atteint quand l'amortissement *moyen* est devenu nul.

Dans le système à amortissement fonction de l'amplitude, on suppose qu'une région assez grande de la caractéristique peut être confondue avec la tangente au point d'inflexion et que le coefficient angulaire de cette tangente est variable et fonction de l'amplitude instantanée. Le régime stationnaire est atteint pour une valeur du coefficient angulaire telle que l'amortissement *instantané* soit constamment nul.

La caractéristique peut donc être considérée comme une droite, ce qui justifie partiellement le titre donné par Arguimbau à son mémoire. Mais c'est une *droite mobile* qui, au cours des fluctuations de l'amplitude, oscille autour du point de repos, obligeant le point de fonctionnement à décrire une courbe par rapport aux axes de coordonnées. La théorie *non-linéaire* reprend alors ses droits et il faut conclure que la dénomination d'oscillateur linéaire est à tout le moins équivoque.

Après quelques hésitations nous nous sommes arrêté à l'expression : « Oscillateur à amplitude autostabilisée ». Elle nous paraît mettre en relief ce qui fait l'originalité de ce système d'entretien, la stabilisation de l'amplitude d'une fonction périodique à partir des variations, *non de la fonction périodique, mais de l'amplitude de cette fonction.*

En rédigeant les chapitres v et vi de la première partie de ce travail nous avons eu souvent recours aux conseils et à l'habileté mathématique de notre collègue le R. P. E. Pinte et

nous l'en remercions vivement. Nous exprimons aussi notre reconnaissance à M. P. Chévenard, grâce à qui nous avons pu utiliser les remarquables propriétés de plusieurs aciers au nickel étudiés par les aciéries d'Imphy.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE THÉORIQUE

CHAPITRE PREMIER

Fondements de la théorie non-linéaire des systèmes autoentretenus.

8. Équation fondamentale de la théorie non-linéaire. —

Nous ne ferons que résumer dans ce chapitre les points fondamentaux de la théorie non-linéaire, en utilisant principalement les travaux de Van der Pol [13] [14], Liénard [10] et Le Corbeiller [8] [9] ⁽¹⁾.

Nous avons observé dans l'Introduction que si un système oscillant est régi par l'équation

$$(1) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\alpha \frac{dz}{dt} + sz = 0,$$

l'adjonction à ce système d'un dispositif d'entretien se traduit par l'introduction dans (1) d'un coefficient soustractif — β , d'où :

$$(2) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} + 2(\alpha - \beta) \frac{dz}{dt} + sz = 0.$$

Tandis que la théorie linéaire considère β comme une constante, la théorie non-linéaire suppose β variable.

1. Le présent travail était achevé quand a paru la *Théorie des oscillateurs* de Y. Rocard [16], dont le ch. II est consacré aux oscillations de relaxation.

Nous avons d'autre part supposé que le système d'entretien n'impose au système oscillant aucune fréquence particulière, bien qu'il puisse en modifier la fréquence propre. β n'est donc pas fonction de t , mais soit de z soit de $\frac{dz}{dt}$.

L'équation (2) prend alors la forme suivante :

$$(4) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} + F\left(z, \frac{dz}{dt}\right) + sz = 0,$$

et il suffit de poser $v = \frac{dz}{dt}$ pour qu'elle se ramène à l'équation du premier ordre

$$(5) \quad mv \frac{dv}{dz} + F(z, v) + sz = 0.$$

L'équation (5) est fondamentale dans la théorie non-linéaire.

9. Interprétation géométrique. — Si nous portons z en abscisses et v en ordonnées, l'équation (5) est l'équation différentielle d'une famille de courbes dans le plan des z, v . En choisissant arbitrairement dans ce plan un point M_0 figurant les conditions initiales, il passera en général par ce point une courbe intégrale unique.

Cette courbe, supposée parcourue par le point M de coordonnées z, v dans un sens donné pour t croissant, fournit une représentation géométrique du mouvement en associant les variations de la vitesse à celles de l'élongation.

A un mouvement *périodique* correspond une courbe intégrale *fermée*.

A un mouvement *périodique stable* correspond une courbe fermée dont s'approchent asymptotiquement en spirales, de l'intérieur et de l'extérieur, pour t croissant, les solutions voisines.

Un des problèmes fondamentaux de la théorie non-linéaire consiste dans la recherche de ces courbes fermées, dites *cycles limites* [1].

10. Interprétation énergétique. — Aux variables z et v substituons les variables x et y définies par les relations :

$$(6) \quad x = \sqrt{\frac{s}{2}} z, \quad y = \sqrt{\frac{m}{2}} v.$$

Si nous désignons par U l'énergie potentielle et par W l'énergie cinétique du système oscillant, nous avons :

$$x^2 = U, \quad y^2 = W.$$

Nous pouvons alors écrire l'équation (5) sous la forme :

$$(5') \quad xdx + ydy + E(x, y)dx = 0.$$

Les deux premiers termes de (5') représentent les demi-variations de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de l'oscillateur pendant l'intervalle de temps dt . Le principe de la conservation de l'énergie nous apprend alors que le troisième terme représente la moitié de l'énergie perdue ou gagnée par l'oscillateur pendant le même intervalle de temps.

Ces considérations ne sont pas seulement valables pour un système oscillant mécanique, elles s'appliquent à tout système caractérisé par l'existence de deux énergies ayant entre elles la même relation que l'énergie potentielle et l'énergie cinétique.

Cette relation s'obtient en remplaçant v par $\frac{dz}{dt}$ et en éliminant z entre les deux relations (6), ce qui donne :

$$(7) \quad y = \frac{1}{\omega} \frac{dx}{dt} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{s}{m}} \right).$$

11. Équation et construction de Liénard. — Gardons les variables x et y qui viennent d'être définies et considérons le cas particulier suivant de l'équation (5') :

$$(8) \quad xdx + ydy + f(y)ydx = 0,$$

qui peut encore s'écrire, en posant :

$$f(y)y = F(y),$$

$$(8') \quad \frac{dx}{dy} + \frac{y}{x + F(y)} = 0.$$

Construisons dans le plan des x, y la courbe $x = -F(y)$ et d'un point M quelconque du plan menons une parallèle à Ox jusqu'à sa rencontre en P avec la courbe, puis de P abaissons une perpendiculaire PN sur Ox (fig. 1).

$$\begin{aligned} mM &= y; \\ Nm &= Om - ON = x + F(y); \\ \frac{mM}{Nm} &= \frac{y}{x + F(y)} = -\frac{dx}{dy}. \end{aligned}$$

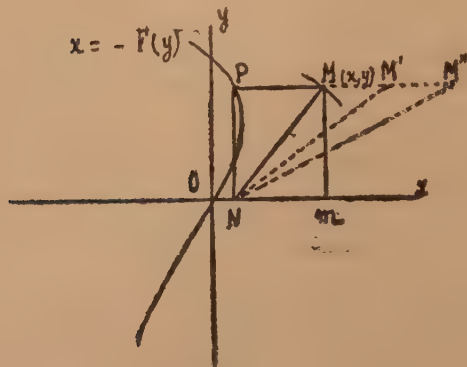


FIG. 1.

La droite NM ayant pour coefficient angulaire $\frac{mM}{Nm} = -\frac{dx}{dy}$ est la normale en M à la courbe intégrale de (8) passant par M.

Cette construction, due à M. Liénard [10], permet d'intégrer graphiquement l'équation (8). Soient en effet les points M', M''... ayant même ordonnée que M. Les normales respectives aux courbes intégrales en M, M', M''... convergent toutes sur l'axe des x en N. On obtiendra donc des éléments de courbe intégrale en M, M', M''... en traçant, avec N pour centre, de petits arcs de cercle rencontrant la droite PM. En opérant de même pour une série d'autres parallèles à Ox, on déterminera dans tout le plan des éléments de courbe intégrale qu'il suffira de relier d'un trait continu.

12. Autre forme de l'équation de Liénard. — Remplaçons dans l'équation (8) $f(y)$ par $f(x)$. Nous obtenons ainsi l'équation

$$(9) \quad xdx + ydy + f(x)ydx = 0,$$

qui peut être considérée comme une autre forme de l'équation de Liénard, car elle se laisse ramener à la forme (8) par le changement de variable suivant, indiqué par M. Liénard.

L'équation (9) peut s'écrire

$$(9') \quad \frac{dy}{dx} + f(x) + \frac{x}{y} = 0,$$

posons

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx$$

et

$$y + F(x) = w$$

d'où en dérivant

$$\frac{dy}{dx} + f(x) = \frac{dw}{dx}$$

et en substituant

$$\text{dans (9')} \quad \frac{dw}{dx} + \frac{x}{w - F(x)} = 0.$$

Cette équation a la même forme que (8'), et, par suite, que (8).

13. Équation de Van der Pol. — Si dans l'équation (9) nous posons :

$$f(x) = -\varepsilon(1 - x^2),$$

nous obtenons l'équation de Van der Pol :

$$(10) \quad xdx + ydy - \varepsilon(1 - x^2)ydx = 0.$$

Cette équation est donc un cas particulier de l'équation de Liénard.

En donnant successivement au paramètre ε les valeurs : $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 10$, puis en intégrant graphiquement l'équation (10) par la méthode des *isoclines*, Van der Pol a construit les *cycles limites* correspondant à ces trois cas.

Il a ensuite construit par la même méthode les intégrales $x = f(t)$ obtenues en remplaçant y par $\frac{1}{\omega} \frac{dx}{dt}$ et en a étudié les propriétés.

L'intérêt de cette étude, qui constitue une remarquable application de la théorie non-linéaire, est de montrer qu'en donnant à ϵ une variation continue, on réalise un passage également continu, entre deux types d'oscillations apparemment très différentes : les oscillations sinusoïdales et celles que Van der Pol a nommées : *oscillations de relaxation*.

Dans les oscillations rigoureusement sinusoïdales une certaine quantité d'énergie se transforme périodiquement d'énergie potentielle en énergie cinétique et réciproquement, l'énergie dissipée étant nulle ou exactement compensée à chaque instant par l'apport d'une source d'énergie.

Dans les oscillations de relaxation l'énergie fournie par la source est progressivement accumulée sous forme potentielle ou cinétique et, dès qu'elle a atteint une valeur déterminée, brusquement dissipée.

Si l'équation de Van der Pol permet de relier deux types aussi opposés de régimes oscillatoires par un vaste domaine intermédiaire, l'oscillation sinusoïdale et l'oscillation de relaxation n'en restent pas moins des *bornes extérieures* à ce domaine.

La raison en apparaît clairement en ce qui concerne l'oscillation de relaxation, qui est un phénomène essentiellement *discontinu* et vers lequel la loi représentée par l'équation (10) ne fait que tendre quand ϵ augmente indéfiniment. C'est pourquoi M. Y. Rocard a proposé de substituer à la caractéristique du 3^e degré, dont la dérivée fournit le coefficient de $y' dx$ dans l'équation (10), une caractéristique de forme anguleuse. Il a montré en particulier qu'il est possible, avec une caractéristique « en dents de scie », de faire une étude mathématique complète des phénomènes de synchronisation et de démultiplication de fréquence [15] [16].

En ce qui concerne l'oscillation sinusoïdale, il apparaît moins immédiatement qu'elle constitue une *borne extérieure* au domaine représenté par l'équation de Van der Pol, puisqu'elle correspond au cas où l'on pose : $\epsilon = 0$.

Mais il faut observer que l'équation (10) se réduit alors à

l'équation différentielle d'une famille de cercles concentriques de rayon quelconque. Parmi cette infinité de cercles un seul constitue — aussi longtemps que ε tend vers zéro sans y atteindre — la limite de la courbe intégrale fermée dont s'approchent asymptotiquement en spirales les autres courbes intégrales. Dès que ε s'annule, toutes les spires de ces spirales se brisent et se referment en cercles indépendants. Il n'y a donc continuité à la frontière que pour une intégrale particulière, celle qui correspond au cycle limite et discontinuité pour toutes les autres. La condition de stabilité définie au n° 9 cesse d'être remplie et l'équation de Van der Pol perd la plus importante de ses propriétés.

Cette conclusion n'est pas particulière à l'équation de Van der Pol. Elle vaut pour toute équation de Liénard.

Si le système d'entretien à amplitude autostabilisée jouit de la propriété d'avoir un régime stationnaire *à la fois sinusoïdal et stable*, l'équation représentant son fonctionnement *ne peut pas être une équation de Liénard*.

Notre première tâche est donc de trouver une généralisation convenable de l'équation de Liénard. Ce sera l'objet du chapitre suivant ⁽¹⁾.

1. Nous avons proposé cette généralisation et nous en avons indiqué les propriétés fondamentales dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 18 mai 1942, *Comptes rendus*, T. 214, p. 841.

CHAPITRE II

Équations aux variations d'énergie d'oscillateurs autoentretenus.

Au lieu de nous donner, comme au chapitre précédent, l'équation différentielle du second ordre (1), d'en déduire l'équation du 1^{er} ordre (5) et de rechercher l'interprétation énergétique de celle-ci, nous allons suivre la marche inverse.

Nous considérerons d'abord deux types d'oscillateurs empruntés, pour plus de simplicité et de généralité, à la technique radioélectrique et nous écrirons, à partir du principe de conservation de l'énergie, les équations du 1^{er} ordre correspondant aux oscillations amorties.

Nous rechercherons ensuite, toujours du point de vue énergétique, comment se transforment ces équations lorsqu'on adjoint aux oscillateurs des dispositifs d'entretien.

La discussion des diverses hypothèses qui se présenteront orientera nos démarches ultérieures.

14. Équation d'un circuit oscillant « série ». — Considérons le circuit de la figure 2 où sont disposés *en série* : un condensateur de capacité C , un enroulement d'inductance L et un conducteur passif de résistance r .

Déterminons arbitrairement un sens de circulation. Le courant et les chutes de potentiel seront comptés positivement dans ce sens et négativement en sens contraire.

Désignons par v la tension aux bornes du condensateur et par i le courant dans l'enroulement.

L'énergie contenue à chaque instant dans le condensateur a pour valeur : $1/2 C v^2$ et celle qui est contenue dans l'enroulement a pour valeur : $1/2 L i^2$. L'énergie dissipée pendant l'unité de temps dans le conducteur passif est égale à $r i^2$.

Écrivons que pendant l'intervalle de temps dt la variation totale d'énergie est nulle

$$(11) \quad C v dv + L i di + r i^2 dt = 0.$$

D'autre part

$$(12) \quad i = C \frac{dv}{dt},$$

éliminons dt entre (11) et (12), il vient :

$$Cvdv + Lidi + Crdv = 0.$$

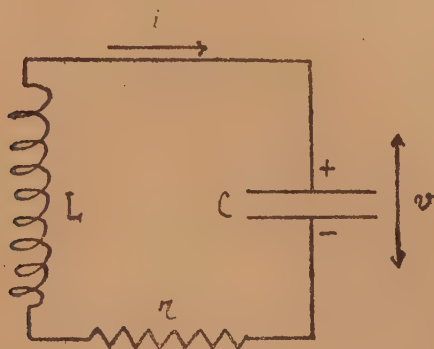


FIG. 2.

Aux variables v et i substituons les variables x et y définies par les relations suivantes, analogues aux relations (6) du n° 10 :

$$x = \sqrt{\frac{C}{2}} v, \quad y = \sqrt{\frac{L}{2}} i;$$

il vient

$$xdx + ydy + \frac{Cr}{\sqrt{LC}} ydx = 0,$$

ou, en mettant en évidence le rapport $\frac{r}{L}$,

$$xdx + ydy + \frac{r}{L} \sqrt{LC} ydx = 0.$$

Posons :

$$(13) \quad \frac{r}{L} \sqrt{LC} = 2R,$$

nous obtenons :

$$(14) \quad xdx + ydy + 2Rydx = 0.$$

15. Équation d'un circuit oscillant « shunt ». — Considérons maintenant le circuit de la figure 3 où sont disposés *en dérivation* : un condensateur de capacité C, un enroulement d'inductance L et un conducteur passif de conductance g.

Les variables v , i , x , y sont les mêmes qu'au numéro précédent.

L'énergie dissipée par unité de temps dans le conducteur passif est égale à gv^2 .

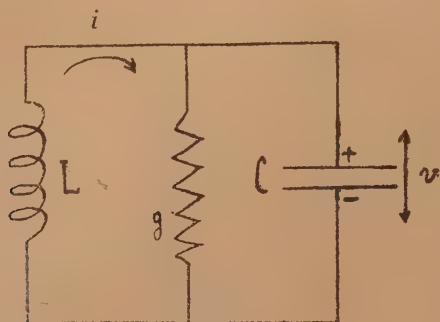


FIG. 3.

Ecrivons que pendant l'intervalle dt la variation totale d'énergie est nulle :

$$Cv dv + L i di + gv^2 dt = 0.$$

D'autre part

$$v = L \frac{di}{dt},$$

éliminons dt

$$Cv dv + L i di + L g v di = 0$$

substituons x et y

$$x dx + y dy + \frac{Lg}{\sqrt{LC}} x dy = 0,$$

ou, en mettant en évidence le rapport $\frac{g}{C}$,

$$x dx + y dy + \frac{g}{C} \sqrt{LC} x dy = 0.$$

Posons :

$$(15) \quad \frac{g}{C} \sqrt{LC} = 2S,$$

nous obtenons :

$$(16) \quad xdx + ydy + 2Sxdy = 0.$$

16. Adjonction de dispositifs d'entretien en série ou en dérivation. — Dans les deux circuits que nous venons d'étudier adjoignons aux conducteurs *passifs*, en série avec celui qui est en série et en dérivation sur celui qui est en dérivation, des conducteurs *actifs*, c'est-à-dire fournissant de l'énergie aux circuits oscillants au lieu d'en dissiper; ce qui exige qu'eux-mêmes contiennent des sources d'énergie.

M. le Corbeiller a montré que pour constituer ces conducteurs actifs il était équivalent de recourir, soit à des conducteurs à *caractéristique tombante*, soit à des conducteurs à *résistance réglable par électrode de commande* [9].

Les quantités d'énergie fournies par les conducteurs actifs pendant l'intervalle de temps dt peuvent être mises sous la forme — $r'i^2dt$ pour le circuit « série » et sous la forme — $g'v^2dt$ pour le circuit « shunt », r' et g' étant des fonctions de i et de v .

Nous sommes ainsi amené à remplacer r et g , dans toutes les équations où ces quantités figurent, par les différences $r - r'$ et $g - g'$. Les équations (14) et (16) ne sont pas changées, mais les coefficients R et S sont désormais des fonctions de x et de y et plusieurs hypothèses doivent être envisagées.

17. Hypothèses sur les fonctions R et S . — Nous pouvons les répartir en trois classes, suivant que R et S sont fonctions soit de x seulement, soit de y seulement, soit simultanément de x et de y . Les équations (14) et (16) donnent alors lieu aux trois groupes suivants de deux équations :

$$1^\circ \quad \begin{aligned} xdx + ydy + 2R(y)ydx &= 0, \\ xdx + ydy + 2S(x)xdy &= 0; \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad \begin{aligned} xdx + ydy + 2R(x)ydx &= 0, \\ xdx + ydy + 2S(y)xdy &= 0; \end{aligned}$$

$$(17) \quad 3^\circ \quad xdx + ydy + 2R(x, y)ydx = 0.$$

$$(18) \quad xdx + ydy + 2S(x, y)xdy = 0.$$

Les deux équations du premier groupe ont même forme que l'équation (8) étudiée au n° 11 et les deux équations du second groupe même forme que l'équation (9) étudiée au n° 12. Les équations de ces deux groupes sont donc des *équations de Liénard*.

Les équations du troisième groupe constituent une *généralisation de l'équation de Liénard*.

Seule une équation du troisième groupe est susceptible de représenter le fonctionnement d'un oscillateur à amplitude autostabilisée. Cet oscillateur vise en effet à concilier la sinusoïdalité et la stabilité des oscillations engendrées. Or :

1° La sinusoïdalité suppose la constance de l'énergie totale et s'exprime par la relation :

$$x^2 + y^2 = A^2$$

qui est l'équation d'un cercle de centre O dans un système d'axes rectangulaires Oxy.

2° La stabilité exige que ce cercle soit une *solution particulière* de l'équation différentielle (14) ou (16) et que les solutions voisines s'approchent asymptotiquement de ce cercle, de l'intérieur et de l'extérieur, pour t croissant. R et S doivent donc être des fonctions continues s'annulant sur ce cercle et contenir, par conséquent, en facteur l'expression $(x^2 + y^2 - A^2)$. Les équations différentielles (14) et (16) prennent alors respectivement les formes (17) et (18).

Notre intention n'est pas de procéder ici à une étude générale des équations différentielles satisfaisant à la double condition qui vient d'être énoncée. Nous ne cherchons à en former qu'une, celle qui exprime le fonctionnement d'un système autoentretenu dans lequel l'amortissement est rendu dépendant de l'amplitude par une technique appropriée. Il nous suffit pour l'instant d'avoir démontré la nécessité, pour y parvenir, de généraliser l'équation de Liénard par la substitution de fonctions simultanées de x et de y aux fonctions séparées de x ou de y .

L'intérêt de cette démonstration apparaîtra surtout au chapitre suivant où nous aborderons le problème de la définition et de la détermination analytique de l'*amplitude instantanée*.

Mais dès maintenant elle nous invite à réfléchir sur le rôle

symétrique que jouent, dans les équations des systèmes oscillants « série » et « shunt », les variables x et y ainsi que les fonctions R et S .

18. Symétries. — Nous avons classé les équations écrites au numéro précédent par groupes de deux dans lesquels chaque équation se déduit de l'autre par permutation des variables x et y et des fonctions R et S . Remontons aux origines de ces symétries.

Une première source de symétrie se trouve dans les relations :

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad \text{et} \quad v = L \frac{di}{dt},$$

qui nous ont servi à éliminer dt dans les équations aux variations d'énergie des circuits « série » et « shunt ».

Par substitution des variables y et x aux variables i et v , ces relations deviennent :

$$y = \sqrt{LC} \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad x = \sqrt{LC} \frac{dy}{dt},$$

et, en posant

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

elles s'écrivent

$$(19) \quad \omega y = \frac{dx}{dt},$$

$$(20) \quad \omega x = \frac{dy}{dt}.$$

La relation (19) s'applique aux circuits « série » et la relation (20) aux circuits « shunt ». En associant (19) à (17) et (20) à (18) on forme deux systèmes d'équations différentielles simultanées du 1^{er} ordre, équivalant chacun à une équation du 2^d ordre, dont la solution permet d'obtenir x et y en fonction de t .

Une seconde source de symétrie découle des expressions ri^2 et gv^2 de l'énergie dissipée par unité de temps dans les conducteurs passifs disposés en série ou en dérivation et des

expressions analogues de l'énergie fournie par les conducteurs actifs. Nous en retrouverons la conséquence en recherchant la signification des fonctions R et S qui règlent le régime de dissipation et d'apport d'énergie.

En rapprochant ces deux sources de symétrie on aboutit à un principe de correspondance entre : tension et courant, capacité et inductance, conductance et résistance. Ce principe est connu en électrotechnique sous le nom de *principe de dualité* et, dans un travail déjà cité [9], M. Le Corbeiller en a tiré une méthode suggestive d'exposition.

19. Signification énergétique des fonctions R et S. — Les équations (14) et (16) donnent lieu, en les écrivant sous la forme (14') et (16') et en tenant compte de (19) et de (20), aux suites de transformations simples suivantes.

$$\begin{aligned} (14') \quad 2Ry \, dx &= -(x \, dx + y \, dy), \\ 4Ry \frac{dx}{dt} &= -2 \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right), \\ 4Ry \frac{dx}{dt} &= -\frac{d}{dt} (x^2 + y^2); \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par ωy

$$\begin{aligned} 4R\omega y^2 &= -\frac{d}{dt} (x^2 + y^2), \\ R &= \frac{1}{4\omega} \frac{\frac{d}{dt} (x^2 + y^2)}{y^2}. \end{aligned}$$

R est égal, à une constante près, à la valeur instantanée du quotient de la vitesse de perte de l'énergie totale par l'énergie cinétique.

$$\begin{aligned} (16') \quad 2Sx \, dy &= -(x \, dx + y \, dy), \\ 4Sx \frac{dy}{dt} &= -2 \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right), \\ 4Sx \frac{dy}{dt} &= -\frac{d}{dt} (x^2 + y^2); \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant $\frac{dy}{dt}$ par ωx

$$\begin{aligned} 4S\omega x^2 &= -\frac{d}{dt} (x^2 + y^2), \\ S &= \frac{1}{4\omega} \frac{\frac{d}{dt} (x^2 + y^2)}{x^2}. \end{aligned}$$

S est égal, à une constante près, à la valeur instantanée du quotient de la vitesse de perte de l'énergie totale par l'énergie potentielle.

Les coefficients R et S sont donc des *taux instantanés de perte d'énergie*, caractérisés par cette particularité que la vitesse de perte d'énergie, bien que portant sur l'énergie totale, n'est rapportée qu'à l'énergie cinétique ou à l'énergie poten-

tielle ⁽¹⁾. Les pertes, bien entendu, se transforment en gains lorsque R et S de positifs deviennent négatifs.

Nous assimilons, dans les paragraphes précédents, l'énergie électrostatique et l'énergie électromagnétique respectivement à l'énergie potentielle et à l'énergie cinétique. Grâce à cette assimilation les conclusions de ce chapitre, bien qu'établies à partir des propriétés des circuits électriques, sont également valables pour les auto-oscillateurs mécaniques.

Toutefois la mécanique ne possède pas autant de ressources que l'électricité. En particulier, lorsque l'énergie potentielle est due à la gravité, il n'y a pas d'équivalent des résis-

1. Une conséquence de cette interprétation énergétique mérite d'être signalée. Si l'on suppose construites pour un oscillateur « série » deux courbes donnant, l'une la variation de x en fonction du temps, l'autre la variation en fonction du temps de l'expression $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, ces deux courbes ont périodiquement, dans toutes les régions où R ne s'annule pas, des contacts du premier ordre correspondant aux valeurs de t pour lesquelles y s'annule. Ces points de contact sont, pour la première courbe, des maxima ou des minima et, pour la seconde, des points d'inflexion. en sorte que les deux branches de cette seconde courbe présentent chacune une série, montante ou descendante, de paliers horizontaux et ont ainsi une forme « en escalier » (fig. 4).

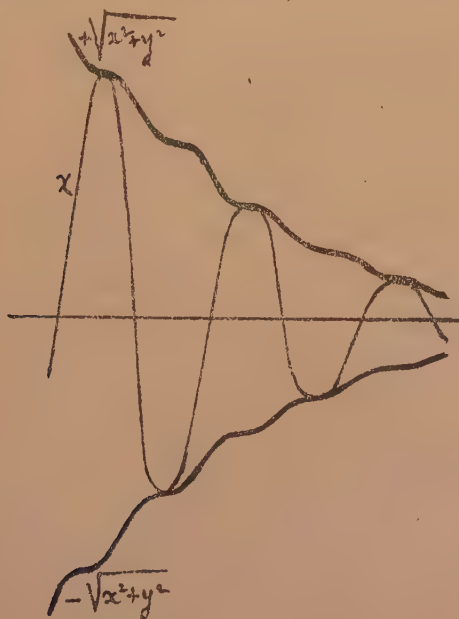


FIG. 4.

tances en dérivation et donc pas d'oscillateurs du type « shunt ». En revanche le pendule de gravité réalise le type « série » à l'état pur, tandis qu'il est impossible de supprimer complètement dans un oscillateur électrique, soit la résistance de fuite du condensateur, soit la résistance ohmique du conducteur constituant l'inductance.

Notons également qu'il serait possible, conformément au principe de dualité, d'intervertir les rôles de l'énergie électrostatique et de l'énergie électromagnétique. Une seule équation entre les variables x et y représenterait à volonté un oscillateur « série » ou un oscillateur « shunt ». Il nous a paru préférable de maintenir la même signification à ces variables et d'écrire des équations différentes, tout en mettant en évidence les symétries qu'elles présentent.

CHAPITRE III

Définition et expression analytique de l'amplitude instantanée.

20. Définition de l'amplitude des oscillations sinusoïdales pures.

— Nous appelons oscillations sinusoïdales *pures* les oscillations régies par l'équation :

$$(21) \quad z = A \sin (\omega t + \varphi).$$

Le coefficient A , que nous supposons positif, est une des deux constantes arbitraires introduites par l'intégration de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0.$$

On le désigne sous le nom d'*amplitude*. La grandeur qu'il représente possède deux propriétés qui en fournissent deux définitions équivalentes :

1° L'amplitude est la valeur absolue des maxima et minima de z .

2° L'amplitude est l'ordonnée de la branche positive de la courbe qui enveloppe toutes les sinusoïdes obtenues en faisant varier la seconde constante arbitraire φ présente dans l'équation (21). Cette enveloppe est en effet formée des deux droites : $z = +A$, $z = -A$.

21. Cas des oscillations sinusoïdales amorties ou modulées. — Considérons l'équation :

$$(22) \quad z = f(t) \sin (\omega t + \varphi),$$

et supposons que $f(t)$ varie *très lentement* par rapport à $\sin (\omega t + \varphi)$. Les oscillations représentées par l'équation (22) sont dites *amorties* si $f(t)$ est une fonction toujours décrois-

sante (ou toujours croissante si l'amortissement est négatif)⁽¹⁾. Elles sont dites *modulées* si $f(t)$ est une fonction périodique. Les unes et les autres peuvent être dites *sinusoïdales*, soit à cause de la présence du facteur $\sin(\omega t + \varphi)$, soit parce que leur forme, si on ne considère que quelques oscillations successives, est voisine de la forme d'une sinusoïde.

On peut, en ce cas, tenter de définir l'amplitude comme précédemment, soit par la considération des maxima et minima, soit par la considération de la courbe enveloppe, mais deux difficultés se présentent.

1° *Les deux définitions ne sont plus équivalentes.* En effet, pour avoir l'équation de l'enveloppe, il faut adjoindre à l'équation (22) celle qu'on en déduit en posant $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$, c'est-à-dire : $\sin(\omega t + \varphi) = \pm 1$; tandis que, pour obtenir les maxima et minima de z , il faut poser $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, ce qui conduit à la condition : $\operatorname{tg}(\omega t + \varphi) = -\omega \frac{f'(t)}{f(t)}$. Les points de contact entre l'enveloppe et les enveloppées cessent de coïncider avec les maxima et les minima dès lors que $f'(t)$ n'est pas nul. Ils en restent sans doute voisins tant que $f'(t)$ est petit. Mais les définitions sont d'ordre *qualitatif* et une courbe destinée à traduire une loi de croissance ou de décroissance ne saurait sans contradiction être considérée comme ayant en tout point sa tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Un choix s'impose donc entre les deux définitions. On pourrait hésiter sur le choix à faire, lorsqu'on entreprend l'étude

1. L'équation générale d'un oscillateur amorti à liaisons indépendantes du temps doit s'écrire en rigueur :

$$(22') \quad z = f(t) \sin \left[\int_0^t \frac{d\theta}{dt} dt + \varphi \right].$$

Ce n'est que lorsque $f(t)$ est de la forme $Ae^{-\gamma \omega t}$ que $\frac{d\theta}{dt}$ est une constante. On a alors : $\frac{d\theta}{dt} = \omega \sqrt{1 - \lambda^2}$. Mais, si λ est assez petit pour qu'on puisse négliger λ^2 , on peut poser : $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ pour différentes valeurs de λ ou même pour une variation continue, lente et de même sens, de λ ; ce qui justifie le mode d'exposition adopté dans le texte.

des oscillations modulées pour laquelle les courbes enveloppes présentent de l'intérêt.

Lorsqu'il est question d'amortissement, l'importance de la notion de *décroissement* l'emporte et impose la prise en considération des maxima et minima. On se heurte alors à une seconde difficulté.

2° *Les maxima et minima de z ne constituent pas une grandeur continûment variable, mais une suite discontinue de valeurs particulières de z .*

Or la conception de l'amplitude instantanée suppose que cette grandeur varie d'une façon continue ⁽¹⁾.

Pour résoudre cette difficulté il nous faut former une fonction continue, susceptible de relier entre elles les valeurs successives des maxima et des minima. Nous nous laisserons guider dans la recherche de cette fonction par la perspective du but poursuivi, qui est d'introduire, dans l'équation différentielle de l'auto-oscillateur que nous étudions, une relation de dépendance entre l'amortissement et l'amplitude.

22. Définition de l'amplitude « instantanée » comme fonction continue des variables x et y . — Plusieurs hypothèses se présentent, que la perspective envisagée conduit à éliminer. En premier lieu l'hypothèse d'une fonction explicite de t ne saurait être retenue. Un auto-oscillateur étant une horloge *donnant le temps*, celui-ci ne doit pas être supposé donné. Nous écarterons ensuite l'hypothèse d'une fonction de z seul, c'est-à-dire de la variable dont la fonction cherchée doit relier les maxima et minima. L'introduction de $f(z)$ dans le coefficient de $\frac{dz}{dt}$ de l'équation du second ordre conduit, pour l'équation du premier ordre en z et $\frac{dz}{dt}$, à une équation de Liénard.

1. Peu d'auteurs, traitant du mouvement oscillatoire amorti, songent à définir avec précision ce qu'ils entendent par « amplitude » d'un tel mouvement. Nous pouvons citer cependant un texte précis de R. Fortrat : « Quand l'amortissement est faible, le mouvement garde assez d'analogies avec un mouvement périodique pour qu'on puisse encore parler de la période. Par contre, il est manifeste que le terme amplitude n'a plus de sens, à moins qu'on n'appelle amplitude de chaque demi-oscillation l'élongation maximum de cette demi-oscillation : c'est ce que nous ferons » [4].

Or nous savons (cf. n° 17) que cette équation ne permet pas de satisfaire simultanément les conditions de sinusoïdalité et de stabilité.

Nous sommes ainsi amené à envisager une fonction de z et $\frac{dz}{dt}$ ou des variables x et y définies au chapitre précédent.

Le problème alors s'élargit, car l'association des deux variables x et y dans une même équation et la symétrie qui existe entre elles dans le couple des équations des oscillateurs « série » et « shunt » nous invitent à donner une définition de l'amplitude commune à ces deux variables.

Nous appellerons donc « amplitude instantanée » une fonction continue, positive, de x et de y , assujettie à coïncider en valeur absolue avec les maxima et les minima de x et de y .

Nous la désignerons par le symbole $A(x, y)$.

Une infinité de fonctions sont susceptibles de satisfaire à cette définition (1). Nous en déterminerons une par des conditions de continuité et de simplicité.

Nous exigerons d'abord que, si on fait tendre vers zéro la fonction R figurant dans l'équation différentielle (14), $A(x, y)$ tende vers la grandeur constante A définissant l'amplitude des oscillations sinusoïdales pures qui sont solution de (14) pour $R = 0$.

Il y aura donc lieu de déterminer la relation qui existe entre cette constante et les variables x et y , puis de rechercher une expression plus générale qui devra tendre vers cette relation quand R tend vers zéro. Parmi les expressions satis-

1. Cette multiplicité provient de ce que, en dehors des valeurs qu'elle possède en commun avec x et y , la fonction $A(x, y)$ reste indéterminée.

Il en va autrement lorsqu'une fonction oscillatoire amortie z est donnée explicitement en fonction de t par une équation telle que (22') (cf. n° 21). On peut alors définir une fonction unique $Z(t)$ en l'assujettissant à coïncider en valeur absolue avec les maxima et minima de la famille infinie de fonctions obtenues en faisant varier φ d'une façon continue de 0 à 2π . On obtient $Z(t)$ en éliminant φ entre l'équation (22') et celle qu'on en déduit en posant : $\frac{dz}{dt} = 0$.

$$Z(t) = \pm \frac{f^s(t) \frac{d\theta}{dt}}{\sqrt{f^s(t) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + f^a(t)}}$$

faisant à cette condition de continuité nous choisirons la plus simple.

23. Détermination de la fonction $A(x, y)$.

1° *Cas d'un amortissement nul* ($R = 0$, $S = 0$). — Si nous faisons $R = 0$ dans l'équation

$$(14) \quad xdx + ydy + 2Rydx = 0,$$

il vient :

$$(23) \quad xdx + ydy = 0,$$

équation à laquelle il faut joindre, pour obtenir x et y en fonction de t , l'équation

$$(19) \quad \omega y = \frac{dx}{dt}.$$

L'intégrale de (23) est un cercle ayant son centre à l'origine et un rayon arbitraire A , dont on peut écrire l'équation sous forme paramétrique :

$$(24) \quad \begin{cases} x = A \sin \theta, \\ y = A \cos \theta. \end{cases}$$

Remplaçons dans (19) y et dx par leurs valeurs tirées de (24), il vient :

$$d\theta = \omega dt,$$

d'où :

$$\theta = \omega t + \varphi,$$

et, en substituant cette valeur de θ dans (24), nous obtenons :

$$(25) \quad \begin{cases} x = A \sin (\omega t + \varphi), \\ y = A \cos (\omega t + \varphi). \end{cases}$$

Les équations (25) montrent que A est l'amplitude (au sens classique) de x et de y . On en déduit :

$$A = + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2° *Cas d'un amortissement non nul* ($R \neq 0$, $S \neq 0$). — L'équation (19) caractéristique de l'oscillateur « série », montre que x est maximum ou minimum quand y s'annule. L'expression $+\sqrt{x^2 + y^2}$ coïncide donc encore en valeur absolue avec les maxima et minima de x , mais elle cesse de coïncider avec ceux de y . L'inverse se produit pour l'oscillateur « shunt ».

Si nous voulons qu'une seule et même fonction s'identifie aux valeurs absolues des maxima et minima des deux variables x et y , il nous faut trouver une expression plus générale qui tende vers $+\sqrt{x^2 + y^2}$ quand R ou S tend vers zéro.

La géométrie analytique nous suggère la forme quadratique complète :

$$(26) \quad +\sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2},$$

qui mesure la distance d'un point à l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes quelconques Oxy et se réduit à la forme incomplète dans le cas de coordonnées rectangulaires.

Nous allons démontrer que l'expression (26) convient en effet, en posant : $\lambda = R$ dans le cas de l'oscillateur « série » et : $\lambda = S$ dans le cas de l'oscillateur « shunt ».

L'oscillateur « série » est régi par l'équation :

$$(14) \quad xdx + ydy + 2Rydx = 0,$$

dans laquelle nous supposons que R est une fonction univoque de x et de y , admettant des dérivées continues en x et en y . Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{x + 2Ry}{y} = -\frac{dy}{dx}.$$

En posant $\frac{dy}{dx} = K$, K étant une constante arbitraire, nous obtenons :

$$x + (2R + K)y = 0$$

équation qui représente en coordonnées rectangulaires la fa-

mille des *isoclines* de l'équation différentielle (14). En y faisant : $K = 0$, nous obtenons la courbe :

$$x + 2Ry = 0$$

qui est le lieu des points de contact des tangentes parallèles à Ox , c'est-à-dire des points où y est maximum ou minimum (fig. 5).

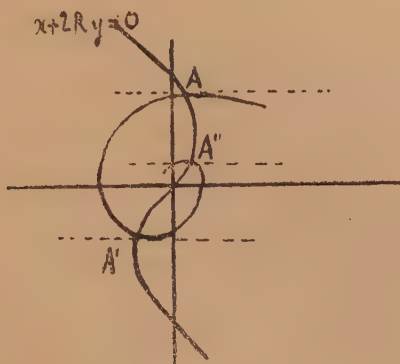


FIG. 5.

Il n'y a exception que pour les points de contact où l'isocline a elle-même une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Ces points sont des points d'inflexion pour les courbes intégrales qui, par suite du changement de signe de la courbure, cessent de représenter un phénomène oscillatoire.

En écrivant :

$$(27) A(x, y) = + \sqrt{x^2 + 2Rxy + y^2} = + \sqrt{x(x + 2Ry) + y^2},$$

nous voyons que :

1° $A(x, y) = + \sqrt{y^2}$ chaque fois que, x étant différent de zéro, $(x + 2Ry)$ s'annule, c'est-à-dire pour tous les maxima et minima de y .

2° $A(x, y) = + \sqrt{x^2}$ chaque fois que y s'annule, c'est-à-dire pour tous les maxima et minima de x .

Les mêmes propriétés sont d'ailleurs communes à d'autres

expressions, telles que : $+\sqrt{(x+2Ry)^2+y^2}$, mais l'expression (27) est la plus simple ⁽¹⁾.

On démontrerait par la même méthode qu'il convient de poser dans le cas de l'oscillateur « shunt » :

$$(28) \quad A(x, y) = +\sqrt{x^2 + 2Sxy + y^2}.$$

Il suffirait dans la démonstration précédente d'échanger x et y , R et S , et dans la figure (4) les axes Ox et Oy .

1. Au lieu du principe de simplicité, délicat à manier, on pourrait justifier le choix de (27) par un nouvel appel au principe de continuité.

Après avoir exigé que, pour R tendant vers zéro, $A(x, y)$ tende vers la constante A qui définit l'amplitude lorsque $R=0$, on pourrait exiger que pour R restant fini et $\frac{dR}{dt}$ tendant vers zéro, $A(x, y)$ tende vers la fonction unique $Z(t)$ définie dans la note précédente. Cette fonction peut être déterminée quand $\frac{dR}{dt}=0$, car le système des équations différentielles (14) et (19) est alors intégrable. On vérifie après intégration que cette fonction, qui est une exponentielle, est égale à $+\sqrt{x^2+2Rxy+y^2}$.

CHAPITRE IV

Formation de l'équation d'un oscillateur à amplitude autostabilisée.

Avant d'aborder dans ce chapitre l'objet principal de la première partie de notre travail, rappelons brièvement les points essentiels acquis au cours des chapitres précédents.

L'étude faite au chapitre II, de l'équation aux variations d'énergie des deux principaux types d'oscillateurs entretenus nous a conduit à introduire deux coefficients numériques R et S , dont les produits respectifs par la constante 4ω mesurent les rapports existant à *chaque instant* entre la vitesse de perte de l'énergie totale et la valeur actuelle de l'énergie soit cinétique, soit potentielle (cf. n° 19). Cette définition, issue de l'équation différentielle où figurent ces coefficients est indépendante de toute hypothèse particulière sur leur loi de variation. Nous pouvons considérer R et S , ou leurs produits par ω , comme des coefficients d'amortissement *instantanés*.

Nous avons d'autre part défini au chapitre III l'amplitude *instantanée* comme une fonction des variables énergétiques x et y , fonction dont nous avons déterminé la forme pour chacune de ces deux variables et pour chacun des deux types d'oscillateurs, « série » et « shunt ».

Il ne nous reste plus qu'à établir une relation entre les grandeurs instantanées ainsi définies et à éliminer R ou S entre cette relation et l'équation aux variations d'énergie.

24. Établissement et discussion d'une relation entre les coefficients R ou S et l'amplitude instantanée. — La relation la plus simple que nous puissions établir entre ces grandeurs est une loi linéaire ⁽¹⁾.

1. Nous verrons dans la seconde partie comment cette loi linéaire peut être réalisée avec une bonne approximation.

Désignons par $A(x, y)$ l'amplitude soit de x soit de y et posons, en nous bornant à considérer le cas de l'oscillateur « série » :

$$(29) \quad R = -a + b A(x, y),$$

a et b étant des constantes positives.

Plusieurs hypothèses peuvent être faites sur les valeurs initiales de $A(x, y)$.

1° Supposons d'abord l'oscillateur au repos. $A(x, y) = 0$ et $R = -a$. Les équations (14) et (19) fournissent le système suivant :

$$(30) \quad \begin{cases} xdx + ydy - 2aydx = 0, \\ \omega y = \frac{dx}{dt}; \end{cases}$$

dont la discussion permet de prévoir la réponse de l'oscillateur à une petite perturbation initiale. L'élimination de y conduit à une équation du second ordre à coefficients constants dont la solution est :

$$x = \epsilon e^{a\omega t} \sin(\omega \sqrt{1 - a^2} t + \varphi).$$

Pour que cette solution représente un phénomène oscillatoire, l'argument de la fonction sinus doit être réel, nous poserons donc :

$$a < 1.$$

D'autre part l'exponentielle $e^{a\omega t}$ étant croissante, les oscillations initiales augmentent d'amplitude, le terme positif $bA(x, y)$ de (29) cesse d'être négligeable et R croît tout en restant d'abord négatif. La première des équations (30) n'est plus valable, mais l'interprétation énergétique de R rappelée ci-dessus montre que, tant que R est négatif, l'énergie totale de l'oscillateur augmente et avec elle l'amplitude.

Si nous écrivons l'équation (29) sous la forme :

$$(29') \quad R = b \left[A(x, y) - \frac{a}{b} \right],$$

nous voyons que, lorsque $A(x, y)$ tend vers $\frac{a}{b}$ par valeurs inférieures, R tend vers zéro par valeurs négatives. $\frac{a}{b}$ est donc une *limite supérieure* de l'amplitude.

2° Supposons maintenant que l'oscillateur soit lancé avec une amplitude supérieure à $\frac{a}{b}$, telle que R_0 , valeur initiale de R , soit compris entre zéro et $+1$. On démontrerait de la même façon que l'oscillation initiale est à amplitude décroissante et que $\frac{a}{b}$ en est une *limite inférieure*.

3° Enfin, si l'amplitude initiale est égale à $\frac{a}{b}$, on a : $R_0 = 0$. On démontre alors, en suivant la même marche qu'au n° 23, que l'oscillation est sinusoïdale, l'amplitude restant égale à $\frac{a}{b}$.

25. Formation de l'équation d'un auto-oscillateur du type « série ». — La discussion qualitative qui précède montre comment la relation linéaire (29) est susceptible d'introduire la *stabilité* dans l'équation d'un auto-oscillateur sans détriment de la *sinusoïdalité*.

Substituons dans cette relation au symbole $A(x, y)$ l'expression (27) établie au chapitre précédent, il vient :

$$(31) \quad R = -a + b \sqrt{x^2 + 2Rxy + y^2}.$$

Cette équation est du second degré en R mais une seule racine est à conserver, celle qui correspond à la valeur positive du radical. En la transportant dans l'équation (14) nous obtenons :

$$(32) \quad xdx + ydy + 2 \left[-(a - b^2xy) + \sqrt{(a - b^2xy)^2 - a^2 + b^2(x^2 + y^2)} \right] ydx = 0.$$

En permutant les variables x et y on obtiendrait l'équation de l'autooscillateur du type « shunt ».

On vérifie facilement que le cercle $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}$ est solution de l'équation (32), mais il nous reste à étudier comment les autres solutions s'approchent de ce cercle. Cette étude fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE V

Étude de l'équation d'un oscillateur à amplitude autostabilisée.

26. Transformation de l'équation (32). — L'équation obtenue à la fin du chapitre précédent se prêtant difficilement à une discussion sous la forme (32), nous la transformerons en recourant à des coordonnées polaires, choisies de façon à ce que le rayon vecteur OM ait pour longueur l'amplitude instantanée.

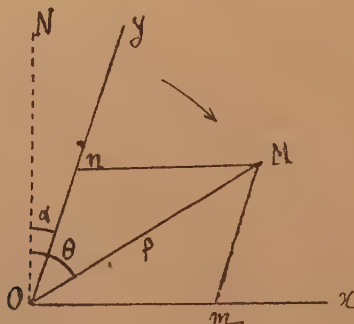


FIG. 6.

Dans ce but nous rapporterons au préalable l'équation (32) à un système d'axes cartésiens obliques, à obliquité variable, *Oxy* (fig. 6)⁽¹⁾.

1. L'intérêt que présente un système d'axes obliques fixes dans la représentation géométrique du mouvement exponentiellement amorti a été mis en lumière par A. Cornu : *Sur la synchronisation d'une oscillation faiblement amortie*. *J. de Phys.*, 1887, T. VI, pp. 453-454.

La référence à un système d'axes à obliquité variable est la traduction géométrique du principe de continuité énoncé au n° 22. Lorsque α tend vers zéro, le système d'axes tend à devenir rectangulaire en même temps que le mouvement tend à devenir rigoureusement sinusoïdal. Si $\frac{d}{dt}$ tendait vers zéro pour une valeur non nulle de α , le mouvement tendrait à devenir exponentiellement amorti et la courbe représentative tendrait vers une spirale logarithmique.

Choisissons comme axe polaire un axe ON perpendiculaire à l'axe Ox. Désignons par α l'angle variable formé par ON et Oy. Nous le compterons positivement, ainsi que l'angle polaire θ , dans le sens de la flèche.

Posons

$$(33) \quad \sin \alpha = R.$$

La longueur du rayon vecteur est donnée par :

$$(34) \quad \rho = \sqrt{x^2 + 2Rxy + y^2},$$

expression qui est celle de l'amplitude instantanée d'un oscilateur du type « série ».

x et y sont donnés en fonction de φ par les relations :

$$(35) \quad \begin{cases} x = \rho \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}, \\ y = \rho \frac{\cos \theta}{\cos \alpha}. \end{cases}$$

Rappelons que l'équation à transformer (32) est équivalente aux deux suivantes :

$$(14) \quad xdx + ydy + 2Rydx = 0$$

$$(31) \quad R = -a + b \sqrt{x^2 + 2Rxy + y^2};$$

que nous transformerons séparément.

Élevons au carré et différencions (34) :

$$\rho d\rho - xdx - ydy - Rydx - Rxdy - xydR = 0,$$

ajoutons (14) :

$$\rho d\rho + R(ydx - xdy) - xydR = 0$$

ou :

$$(36) \quad \frac{\rho}{y} d\rho + R d\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y} dR = 0.$$

De (35) tirons :

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta \cos \alpha - \sin \alpha$$

et

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \theta} d\theta - (\operatorname{tg} \theta \sin \alpha + \cos \alpha) d\alpha,$$

(36) devient, par élimination des variables x et y :

$$\frac{d\rho \cos^2 \alpha}{\rho \cos^2 \theta} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \theta} d\theta - (\operatorname{tg} \theta \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \operatorname{tg} \theta \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) d\alpha =$$

ou :

$$(37) \quad \frac{d\rho}{\rho} \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha d\theta - \sin \theta \cos \theta d\alpha = 0.$$

D'autre part (31), (33) et (34) donnent entre ρ et α la relation :

$$(38) \quad \sin \alpha = b\rho - a,$$

d'où :

$$(39) \quad d\alpha = \frac{b}{\cos \alpha} d\rho,$$

et (37) devient, par élimination de $\sin \alpha$ et de $d\alpha$:

$$(40) \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\cos^2 \alpha (a - b\rho)\rho}{\cos^2 \alpha - b^2 \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta},$$

qui peut encore s'écrire :

$$(40') \quad \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\cos^2 \alpha - b^2 \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \alpha (a - b\rho)}.$$

L'équation (40) est la transformée cherchée de l'équation (32).

27. Discussion de l'équation (40). — Nous avons été amené à poser au n° 24, comme *condition nécessaire d'autoamortissement* :

$$0 < a < 1.$$

Nous allons restreindre le domaine des valeurs pouvant être prises par le coefficient a , ainsi que l'intervalle de variation de

ρ , en imposant à la quantité qui figure au dénominateur de (40) de rester toujours positive, en sorte que le signe de $\frac{d\rho}{d\theta}$ soit celui de $(a - b\rho)$.

Désignons cette quantité par D et écrivons-la sous la forme :

$$D = \cos^3 \alpha - (a + \sin \alpha) \sin \theta \cos \theta.$$

Pour $\theta = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $\sin \theta \cos \theta$ passe par un maximum égal à $\frac{1}{2}$. Si nous voulons que D soit toujours positif, le coefficient a doit satisfaire à l'inégalité :

$$\frac{a + \sin \alpha}{2} < \cos^3 \alpha,$$

ou

$$(41) \quad a < 2 \cos^3 \alpha - \sin \alpha.$$

Pour résoudre cette inégalité, étudions dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$ la variation de la fonction :

$$u = 2 \cos^3 \alpha - \sin \alpha.$$

Sa dérivée

$$\frac{du}{d\alpha} = -\cos \alpha (3 \sin 2\alpha + 1),$$

s'annule quatre fois dans l'intervalle considéré.

Les valeurs remarquables de la variable, de la dérivée et de la fonction sont données dans le tableau suivant :

$\alpha \dots$	-90°	$-80^\circ 16'$	$-75^\circ 16'$	$-9^\circ 44'$	0	$+26^\circ 15'$	$+45^\circ$	$+90^\circ$
$u' \dots$	0	0	+	0				0
$u \dots$	1	0,995	1	2,084	2	1	0	-1

En construisant la courbe représentative des variations de u et en menant une droite horizontale d'ordonnée a (fig. 7), on voit que :

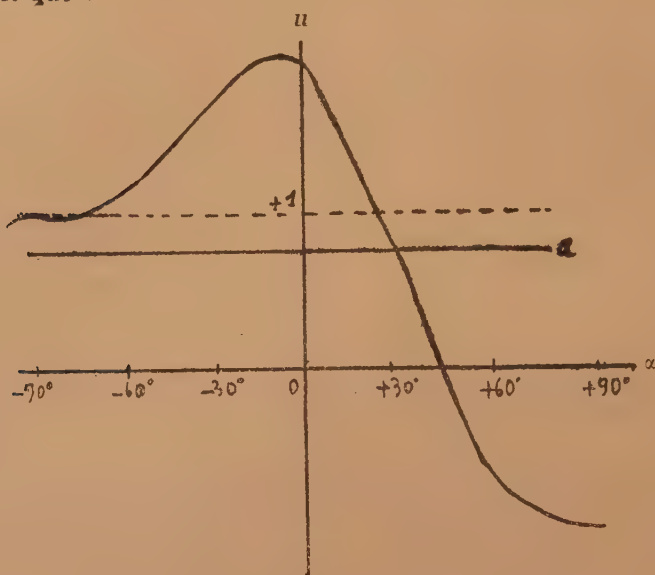


FIG. 7.

1° La condition pour que l'inégalité (41) soit satisfaite pour toutes les valeurs de α comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 est :

$$0 < a < 0,995$$

2° Si cette condition est réalisée, l'inégalité est aussi satisfaite pour toutes les valeurs de α comprises entre zéro et une valeur positive située, suivant la valeur de a , entre $26^{\circ}15'$ et 45° .

Les valeurs de ρ correspondant à ces valeurs de a et de α sont données par l'équation (38), écrite sous la forme :

$$\rho = \frac{a}{b} \left(1 + \frac{\sin \alpha}{a} \right).$$

En particulier, en donnant à a la valeur 0,995 et à α la valeur $26^{\circ}15'$ la valeur correspondante de ρ est environ :

$$1,444 \frac{a}{b}.$$

Pour simplifier la discussion de l'équation (40) nous posons donc :

$$0 < a < 0,995$$

condition qui restreint très peu le domaine déjà déterminé pour a par la condition nécessaire d'autoamorçage.

Nous formerons ensuite les trois hypothèses suivantes sur ρ_0 , valeur initiale de ρ :

1° $\rho_0 = \frac{a}{b}$ $\frac{d\rho}{d\theta}$ est nul, ρ reste constant et égal à $\frac{a}{b}$, quel que soit θ . La courbe intégrale est un cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{b}$. α est nul et les coordonnées cartésiennes sont rectangulaires.

2° $0 < \rho_0 < \frac{a}{b}$ $\frac{d\rho}{d\theta}$ est positif, ρ croît en tendant vers la valeur $\frac{a}{b}$ pendant que θ tend vers l'infini. Les courbes intégrales sont des spirales intérieures au cercle et s'en approchent asymptotiquement. α est négatif et l'angle xOy est obtus, tendant vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs supérieures.

3° $\frac{a}{b} < \rho_0 < 1,444 \frac{a}{b}$ $\frac{d\rho}{d\theta}$ est négatif, ρ décroît en tendant vers la valeur $\frac{a}{b}$ pendant que θ tend vers l'infini. Les courbes intégrales sont des spirales extérieures au cercle et s'en approchent asymptotiquement. α est positif et l'angle xOy est aigu, tendant vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures.

Si, dans l'intervalle considéré des valeurs de ρ , θ est une fonction toujours croissante de t et égale à $\omega t + \varphi$ pour $\alpha = 0$, ce que nous vérifierons ci-dessous, nous pouvons conclure de la discussion qui précède que :

1° Le système oscillant est *autoamorçant*, c'est-à-dire que les moindres perturbations de l'état de repos provoquent des oscillations dont l'amplitude va en augmentant.

2° Le système oscillant admet un régime stationnaire, *sinusoïdal et stable*, dont l'amplitude est égale à $\frac{a}{b}$. Si une perturbation extérieure l'en écarte, il y revient de lui-même pourvu que cette perturbation ne fasse pas atteindre à l'amplitude, dans l'hypothèse la plus défavorable, une valeur supérieure à $1,444 \frac{a}{b}$.

On a alors :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{b} \sin (\omega t + \varphi), \\ y = \frac{a}{b} \cos (\omega t + \varphi). \end{cases}$$

Quelques remarques peuvent nous aider à nous faire une idée de la forme des spirales.

Chaque spire coupe l'axe des x sous un angle égal à xOy . En effet, x étant maximum quand y s'annule, la tangente à la courbe est alors parallèle à Oy .

La tangente est parallèle à Ox quand y est maximum, c'est-à-dire pour $x + 2Ry = 0$. En substituant à x , y et R leurs expressions en fonction de θ et de α , il vient : $\sin (\theta + \alpha) = 0$, d'où $\theta = k\pi - \alpha$. Les spirales ont donc leur tangente parallèle à Ox chaque fois qu'elles coupent un axe symétrique de Oy par rapport à ON (fig. 6).

L'équation écrite sous la forme (40') donne la tangente de l'angle formé par la tangente à la courbe avec le rayon vecteur. Cet angle subit, outre la variation lente due au facteur $a - b\rho$, une variation périodique due au facteur $\sin \theta \cos \theta$. Cette variation disparaît complètement quand le régime stationnaire est atteint.

28. Établissement et discussion de la relation entre $d\theta$ et dt .

— Nous disposons, pour établir cette relation, de l'équation :

$$(19) \quad \omega y = \frac{dx}{dt}$$

et des formules de transformation déjà utilisées :

$$(35) \quad x = \rho \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}, \quad y = \rho \frac{\cos \theta}{\cos \alpha}.$$

Différentions la première :

$$dx = d\rho \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} + \rho \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} d\theta - \rho \frac{\cos \theta}{\cos^2 \alpha} d\alpha,$$

d'où :

$$\omega dt = \frac{dx}{y} = \frac{d\rho}{\rho} \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \theta} + \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \theta} d\theta - \frac{d\alpha}{\cos \alpha}.$$

Éliminons $d\alpha$ par la relation (39) :

$$\omega dt = \left[\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \theta} - \frac{b\rho}{\cos^2 \alpha} \right] \frac{d\rho}{\rho} + \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \theta} d\theta.$$

Éliminons $b\rho$ par la relation (38) et $\frac{d\rho}{\rho}$ par (40) :

$$\begin{aligned} dt &= \left\{ \left[\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \theta} - \frac{a + \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right] \frac{-\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^3 \alpha - (a + \sin \alpha) \sin \theta \cos \theta} + \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \theta} \right\} d\theta, \\ dt &= \frac{-(\operatorname{tg} \theta \cos \alpha - \sin \alpha) \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (a + \sin \alpha) + (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \theta) [\cos^3 \alpha - (a + \sin \alpha) \sin \theta \cos \theta]}{\cos^3 \alpha - (a + \sin \alpha) \sin \theta \cos \theta} \\ dt &= \frac{-\sin \alpha \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \theta + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (a + \sin \alpha) + \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \theta - (a + \sin \alpha) (\cos \alpha \sin \theta \cos \theta + \sin \alpha \sin^2 \theta)}{\cos^3 \alpha - (a + \sin \alpha) \sin \theta \cos \theta} \\ 2) \quad \omega dt &= \frac{\cos^3 \alpha - (a + \sin \alpha) \cos \theta \sin(\theta - \alpha)}{\cos^3 \alpha - (a + \sin \alpha) \sin \theta \cos \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Le dénominateur de (42) est la quantité D étudiée au numéro précédent. Nous avons déterminé les valeurs de a et de α pour lesquelles elle demeure positive. Reste à étudier le numérateur N.

Nous pouvons écrire :

$$2N = 2 \cos^3 \alpha - (a + \sin \alpha) [\sin(2\theta - \alpha) - \sin \alpha],$$

$$2N = 1 + a \sin \alpha - (a + \sin \alpha) \sin(2\theta - \alpha) + \cos^3 \alpha.$$

Quand θ varie, $2N$ oscille entre :

$$1 + a \sin \alpha - a - \sin \alpha + \cos^3 \alpha \quad \text{et} \quad 1 + a \sin \alpha + a + \sin \alpha + \cos^3 \alpha,$$

ou

$$(1-a)(1-\sin \alpha) + \cos^2 \alpha \quad \text{et} \quad (1+a)(1+\sin \alpha) + \cos^2 \alpha.$$

Or ces deux expressions sont positives pour $0 < a < 1$. Nous sommes donc assuré que θ est fonction croissante de t dans l'intervalle de variation de φ auquel nous avons limité notre discussion.

Lorsque $\alpha = 0$ l'expression (42) devient :

$$d\theta = \omega dt, \quad \text{d'où} \quad \theta = \omega t + \varphi,$$

et ainsi les conclusions du numéro précédent sont définitivement acquises.

29. Autres coefficients différentiels. — Les relations (38), (39), (40) et (42) qui donnent les coefficients différentiels $\frac{d\alpha}{d\varphi}$, $\frac{d\varphi}{d\theta}$, $\frac{d\theta}{dt}$, nous permettent d'obtenir également les coefficients $\frac{d\alpha}{d\theta}$ et $\frac{d\alpha}{dt}$, dont les expressions nous seront utiles au chapitre suivant :

$$(43) \quad \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d\alpha}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{-(a + \sin \alpha) \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^3 \alpha - (a + \sin \alpha) \sin \theta \cos \theta},$$

$$(44) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{-(a + \sin \alpha) \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^3 \alpha - (a + \sin \alpha) \cos \theta \sin(\theta - \alpha)}.$$

CHAPITRE VI

Étude des fluctuations de l'amplitude instantanée. Variante du système d'entretien.

30. Origine et effets des fluctuations de l'amplitude instantanée. — Nous étudierons dans ce chapitre, sous le nom de « fluctuations », des variations de l'amplitude à la fois assez petites et assez lentes pour qu'elles puissent, à l'aide d'approximations convenables, être soumises au calcul à partir des relations établies au chapitre précédent.

Les fluctuations de l'amplitude instantanée peuvent provenir soit d'une perturbation des conditions initiales, soit de la variation des paramètres du dispositif d'entretien.

Dans le premier cas l'amplitude écartée brusquement de sa valeur stationnaire $\frac{a}{b}$ s'en rapproche ensuite asymptotiquement, ainsi qu'il a été vu au chapitre précédent.

Dans le second cas les constantes a et b doivent, à partir d'un instant donné, être remplacées par de nouvelles constantes a_1 et b_1 , que nous supposons peu différentes des premières; l'amplitude évolue alors de la valeur $\frac{a}{b}$ vers la valeur $\frac{a_1}{b_1}$.

Une perturbation des conditions initiales entraîne généralement une variation brusque de la phase initiale, dont l'importance dépend de la valeur de la phase instantanée θ à l'époque de la perturbation et dont nous n'avons pas à nous occuper pour l'instant.

Une variation des paramètres d'entretien n'entraîne *par elle-même* aucune variation de phase.

Mais, dans l'un et l'autre cas, *tant que dure la fluctuation de l'amplitude*, la pulsation $\frac{d\theta}{dt}$ cesse d'être constante et égale à ω . Lorsque la pulsation reprend la valeur ω , la phase initiale φ n'a plus la même valeur qu'auparavant et il en résulte, pour

un oscillateur employé comme garde-temps, une avance ou un retard qu'il est important de pouvoir déterminer.

31. Expression et ordre de grandeur de l'écart relatif d'amplitude. — Nous désignons sous le nom d'« écart relatif d'amplitude » la quantité :

$$(45) \quad \varepsilon = \frac{\rho - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}.$$

Supposons qu'à une époque déterminée, choisie comme instant initial, ε passe d'une valeur nulle à une valeur donnée ε_0 en un temps négligeable par rapport à celui de son retour de ε_0 à zéro.

Convenons d'autre part que a et b représentent les constantes du système d'entretien à *partir de l'instant initial*. L'expression (45) s'applique alors indifféremment au cas d'une perturbation des conditions initiales ou à celui d'une variation des paramètres d'entretien.

L'écart ε est relié par une expression simple à l'angle α introduit au début du chapitre précédent. La relation

$$(38) \quad \sin \alpha = b\rho - a$$

donne en effet :

$$\rho - \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{b},$$

d'où :

$$\varepsilon = \frac{\rho - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{\sin \alpha}{a}.$$

Nous supposons ε_0 inférieur à 0,1 et a inférieur à 0,01, en sorte que $\sin \alpha$ reste inférieur à 0,001.

Nous fixons à 0,001 la limite supérieure des erreurs relatives admises dans les calculs qui vont suivre.

Nous pouvons donc écrire, en négligeant $\frac{a^2}{6}$ à côté de 1 :

$$(46) \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{a}.$$

Commençons par rechercher comment évolue ε de ε_0 à zéro, en fonction de θ .

32. Loi d'évolution de l'écart relatif d'amplitude. — L'équation (46) ramène cette recherche à l'intégration approchée de la relation différentielle :

$$(43) \quad \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{-(a + \sin \alpha) \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - (a + \sin \alpha) \sin \theta \cos \theta}.$$

En négligeant $\frac{\alpha}{2}$ à côté de 1, on peut écrire :

$$\frac{-d\alpha}{(a + \alpha) \alpha} = \frac{d\theta}{1 - a \sin \theta \cos \theta}.$$

Posons : $\operatorname{tg} \theta = u$, $\sin \theta \cos \theta = \frac{u}{1 + u^2}$, $d\theta = \frac{du}{1 + u^2}$,

il vient :

$$\begin{aligned} \frac{-d\alpha}{(a + \alpha) \alpha} &= \frac{du}{1 - au + u^2}, \\ \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{a + \alpha} - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} &= \int_{u_0}^u \frac{adu}{\left(u - \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4}}, \\ \operatorname{Log}_e \frac{a + \alpha}{\alpha} \frac{\alpha_0}{a + \alpha_0} &= \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}} \left[\operatorname{arc tg} \frac{\operatorname{tg} \theta - \frac{a}{2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}} - \operatorname{arc tg} \frac{\operatorname{tg} \theta_0 - \frac{a}{2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}} \right]. \end{aligned}$$

Posons :

$$(47) \quad \operatorname{arc tg} \frac{\operatorname{tg} \theta - \frac{a}{2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}} = \theta - \psi.$$

Nous obtenons :

$$\frac{a + \alpha}{\alpha} = \frac{a + \alpha_0}{\alpha_0} e^{\frac{a}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}} (\theta - \theta_0 - \psi + \psi_0)}$$

On a d'autre part :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}} = \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{a^2}{8} + \dots$$

Négligeons $\frac{a^2}{8}$ à côté de 1 :

$$\frac{a}{\alpha} + 1 = \left(\frac{a}{\alpha_0} + 1\right) e^{a(\theta - \theta_0 - \psi + \psi_0)}$$

En faisant $\theta_0 = 0$, il vient d'après (47) : $\psi_0 = \frac{a}{2}$, d'où

$$\frac{a}{\alpha} = \left(\frac{a}{\alpha_0} + 1\right) e^{a\left(\theta - \psi + \frac{a}{2}\right)} - 1,$$

$$\alpha = \frac{a}{\left(\frac{a}{\alpha_0} + 1\right) e^{a\left(\theta - \psi + \frac{a}{2}\right)} - 1} = \frac{\alpha_0 e^{-a\left(\theta - \psi + \frac{a}{2}\right)}}{1 + \frac{\alpha_0}{a} \left[1 - e^{-a\left(\theta - \psi + \frac{a}{2}\right)}\right]}.$$

Une étude des variations de la fonction ψ , que nous donnons en appendice, montre que, lorsque θ augmente d'une façon continue, ψ oscille entre un minimum et un maximum approximativement égaux à zéro et à $\frac{a}{2}$. On peut alors, en

négligeant $\frac{a^2}{2}$ à côté de 1, remplacer $e^{a\left(\psi - \frac{a}{2}\right)}$ par 1. D'où

$$(48) \quad \alpha = \frac{\alpha_0 e^{-a\theta}}{1 + \frac{\alpha_0}{a} (1 - e^{-a\theta})},$$

et d'après (46) :

$$(49) \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0 e^{-a\theta}}{1 + \frac{\varepsilon_0}{a} (1 - e^{-a\theta})},$$

ou

$$(49') \quad e^{a\theta} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon_0}{a}}.$$

Comme application de cette loi d'évolution, supposons $a = 0,01$ et déterminons le nombre d'oscillations nécessaires pour que l'écart d'amplitude soit réduit de 0,1 à 0,01.

L'équation (49') donne :

$$e^{\frac{1}{100}} = \frac{0,1}{0,01} \frac{1,01}{1,1} = \frac{101}{11},$$

$$\theta = 100 (\text{Log}_e 101 - \text{Log}_e 11) = 221,7 = 2\pi \cdot 35,29.$$

Il faut donc un peu plus de 35 oscillations pour réduire ε de 0,1 à 0,01.

33. Variation de phase initiale consécutive à une fluctuation de l'amplitude. — Soient un vecteur tournant à la vitesse angulaire ω , supposée constante par rapport à une horloge fondamentale, et un second vecteur d'abord synchrone avec le premier puis, à partir d'un instant initial, tournant à la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$, différente de ω et variable, par suite d'un écart d'amplitude ε_0 survenu à l'instant initial.

En même temps que ε évolue de ε_0 vers zéro suivant la loi que nous venons de déterminer, $\frac{d\theta}{dt}$ tend vers ω . Il s'introduit alors entre les deux vecteurs tournants une différence de phase tendant vers une limite donnée par l'expression

$$(50) \quad \varphi = \int_0^{+\infty} \left(\omega - \frac{d\theta}{dt} \right) dt.$$

Pour déterminer φ en fonction de ε_0 choisissons α comme variable indépendante :

$$\varphi = \int_{\varepsilon_0}^0 \left(1 - \frac{1}{\omega} \frac{d\theta}{dt} \right) \omega \frac{dt}{d\alpha} d\alpha.$$

Les relations (42) et (44) établies au chapitre précédent donnent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\cos^2 \alpha - (a + \sin \alpha) \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \alpha - (a + \sin \alpha) \cos \theta \sin(\theta - \alpha)}, \\ \omega \frac{dt}{d\alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha - (a + \sin \alpha) \cos \theta \sin(\theta - \alpha)}{-(a + \sin \alpha) \sin \alpha \cos \alpha}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi = \int_0^{\alpha} \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 x + (a + \sin \alpha) \cos \theta [\sin \theta - \sin(\theta - \alpha)]}{(a + \sin \alpha) \sin \alpha \cos \alpha} dx,$$

$$\varphi = \int_0^{\alpha} \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 x}{(a + \sin \alpha) \sin \alpha \cos \alpha} dx + \int_0^{\alpha} \frac{\cos \theta [\sin \theta - \sin(\theta - \alpha)]}{\sin \alpha \cos \alpha} dx,$$

$$\varphi = \int_0^{\alpha} \frac{\cos x (1 - \cos x)}{(a + \sin \alpha) \sin \alpha} dx + \int_0^{\alpha} \frac{2 \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha \cos \alpha} dx,$$

$$\varphi = \int_0^{\alpha} \lg \frac{\alpha}{2} \frac{\cos x}{a + \sin \alpha} dx + \int_0^{\alpha} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(2\theta - \frac{\alpha}{2} \right) + \cos \frac{\alpha}{2} \right]}{\sin \alpha \cos \alpha} dx,$$

$$\varphi = \int_0^{\alpha} \lg \frac{\alpha}{2} \frac{\cos x}{a + \sin \alpha} dx + \int_0^{\alpha} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha \cos \alpha} dx + \int_0^{\alpha} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(2\theta - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha \cos \alpha} dx,$$

$$\varphi = \int_0^{\alpha} \lg \frac{\alpha}{2} \frac{\cos x}{a + \sin \alpha} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\cos \alpha} + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \lg \frac{\alpha}{2} \frac{\sin 2\theta}{\cos \alpha} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \frac{\cos 2\theta}{\cos \alpha} dx.$$

En négligeant les termes en α^2 à côté de 1 :

$$\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \frac{\alpha dx}{a + \alpha} + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} dx + \frac{1}{4} \int_0^{\alpha} \sin 2\theta \alpha dx + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \cos 2\theta dx.$$

Les deux dernières intégrales sont négligeables. En effet :

$$1^{\circ} \quad \frac{1}{4} \int_0^{\alpha} \sin 2\theta \alpha dx < \frac{1}{4} \int_0^{\alpha} \alpha dx,$$

$$\frac{1}{4} \int_0^{\alpha} \sin 2\theta \alpha dx < \frac{\alpha_0^2}{8} \sim 0,$$

2° Pour calculer $\frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \cos 2\theta dx$ partons de la relation (49) :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 e^{-a\theta}}{1 + \varepsilon_0 (1 - e^{-a\theta})},$$

ou, en négligeant les termes en ε_0^3 à côté de 1 :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0(1 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2) e^{-a\theta} + \varepsilon_0^2(1 - 2\varepsilon_0) e^{-2a\theta} + \varepsilon_0^3 e^{-3a\theta} \\ d\alpha &= a d\varepsilon = -a^3 [\varepsilon_0(1 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2) e^{-a\theta} + 2\varepsilon_0^2(1 - 2\varepsilon_0) e^{-2a\theta} + 3\varepsilon_0^3 e^{-3a\theta}] d\theta \\ \int_0^{\alpha_0} \cos 2\theta d\alpha &= \frac{a^3}{2} \left[\varepsilon_0(1 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2) \int_0^\infty e^{-a\theta} \cos 2\theta d\theta \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon_0^2(1 - 2\varepsilon_0) \int_0^\infty e^{-2a\theta} \cos 2\theta d\theta + 3\varepsilon_0^3 \int_0^\infty e^{-3a\theta} \cos 2\theta d\theta \right] \\ &= \frac{a^3}{2} \left\{ \varepsilon_0(1 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2) \left[e^{-a\theta} \frac{2 \sin 2\theta - a \cos 2\theta}{a^2 + 4} \right]_0^\infty \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon_0^2(1 - 2\varepsilon_0) \left[e^{-2a\theta} \frac{2 \sin 2\theta - 2a \cos 2\theta}{4a^2 + 4} \right]_0^\infty \right. \\ &\quad \left. + 3\varepsilon_0^3 \left[e^{-3a\theta} \frac{2 \sin 2\theta - 3a \cos 2\theta}{9a^2 + 4} \right]_0^\infty \right\} \\ &= \frac{a^3}{2} \left[\frac{\varepsilon_0(1 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2)}{4} + \varepsilon_0^2(1 - 2\varepsilon_0) + \frac{9}{4} \varepsilon_0^3 \right] = \frac{a^3}{4} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{3}{2} \varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^3 \right) \sim 0. \end{aligned}$$

L'équation (51) se réduit donc à :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} \frac{\alpha d\alpha}{a + \alpha} + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} d\alpha, \\ \psi &= \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} \left(1 - \frac{a}{a + \alpha} \right) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} d\alpha, \\ \zeta &= \int_0^{\alpha_0} d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} \frac{a}{a + \alpha} d\alpha, \\ \eta &= \alpha_0 - \frac{a}{2} \operatorname{Log}_e \frac{a + \alpha_0}{a}, \\ \varphi &= \alpha_0 - \frac{a}{2} \left(\frac{\alpha_0}{a} - \frac{\alpha_0^2}{2a^2} + \dots \right), \\ \psi &= \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_0^2}{4a} = \frac{a \varepsilon_0}{2} + \frac{a \varepsilon_0^2}{4}, \\ (52) \quad \zeta &= \frac{a}{2} \left(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Pour un écart donné ε_0 , φ est proportionnel à a . Il y a donc intérêt à prendre a petit.

Posons par exemple : $a = \frac{1}{100}$ et $\varepsilon_0 = \frac{1}{10}$

$$\varphi = \frac{1}{2.000} + \frac{1}{40.000}.$$

$$\frac{\varphi}{2\pi} < \frac{1}{10.000}.$$

Si la période de l'oscillateur est d'une seconde, le retard consécutif à une augmentation relative d'amplitude d'un dixième est inférieur à un dix-millième de seconde. Une diminution d'amplitude produirait une avance, et des écarts alternativement positifs et négatifs du même ordre de grandeur autour d'une valeur moyenne constante de l'amplitude compenseraient leurs effets, en sorte que l'heure indiquée par l'oscillateur ne différerait de celle de l'horloge fondamentale que d'une quantité toujours inférieure au dix-millième de seconde.

34. Variante du système d'entretien à amplitude autostabilisée.

— L'étude que nous venons de faire montre que tout l'intérêt du système d'entretien à amplitude autostabilisée réside dans son fonctionnement au voisinage de la valeur stationnaire de l'amplitude. Il est dès lors indifférent que la loi de proportionnalité définie par la relation (29) (cf. ch. iv, n° 24) soit vérifiée pour toutes les valeurs de l'amplitude comprise entre zéro et cette valeur stationnaire. Nous sommes ainsi amené à envisager une variante intéressante du système d'entretien.

Donnons au coefficient d'amortissement R une valeur négative constante $-a_0$ tant que l'amplitude est inférieure à un seuil A_0 et supposons que vienne s'y ajouter, dès que l'amplitude a atteint ce seuil, un terme proportionnel à la différence entre $A(x, y)$ et A_0 :

$$(53) \quad R = -a_0 + b[A(x, y) - A_0].$$

Il suffit de poser :

$$(54) \quad a = a_0 + bA_0,$$

pour retrouver :

$$(29) \quad R = -a + bA(x, y).$$

et tous les résultats des chapitres précédents. En particulier l'amplitude stationnaire est donnée par :

$$(54') \quad \frac{a}{b} = A_0 + \frac{a_0}{b}.$$

Le principal avantage de cette variante est que la loi de proportionnalité (53) n'exige d'être vérifiée que pour un petit domaine de valeurs de $A(x, y)$, ce qui est plus facile à réaliser techniquement.

L'oscillateur reste autoamorçable, mais la croissance de l'amplitude se fait suivant deux lois différentes, la loi exponentielle pour les amplitudes inférieures à A_0 et la loi étudiée au cours des deux chapitres précédents pour les amplitudes comprises entre A_0 et $A_0 + \frac{a_0}{b}$.

APPENDICE

Valeur et variation de ψ (N° 32).

D'après (47) :

$$\psi = \theta + \arctg \frac{\operatorname{tg} \theta - \frac{a}{2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}}.$$

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}} = \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{a^2}{8} + \dots$$

en négligeant $\frac{3a^4}{128}$.

d'où :

$$\operatorname{tg}(\theta - \psi) = \left(\operatorname{tg} \theta - \frac{a}{2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) = \operatorname{tg} \theta \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) - \frac{a}{2},$$

en négligeant $-\frac{a^2}{16}$;

$$\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \psi = (1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \psi) \left[\operatorname{tg} \theta \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) - \frac{a}{2} \right],$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a}{2} \frac{1 - \frac{a}{4} \operatorname{tg} \theta}{1 - \frac{a}{2} \operatorname{tg} \theta + \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

Posons $\operatorname{tg} \psi = y$, $\operatorname{tg} \theta = x$:

$$y = \frac{a}{2} \frac{1 - \frac{a}{4} x}{1 - \frac{a}{2} x + \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) x^2},$$

$$y' = \frac{a}{2} \frac{-\frac{a}{4} \left[1 - \frac{a}{2} x + \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) x^2 \right] + \left(\frac{a}{4} x - 1 \right) \left[-\frac{a}{2} + 2 \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) x \right]}{\left[1 - \frac{a}{2} x + \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) x^2 \right]^2},$$

$$y' = \frac{a}{2} \frac{\frac{a}{4} \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) x^2 - 2 \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) x + \frac{a}{4}}{\left[1 - \frac{a}{2} x + \left(1 + \frac{a^2}{8} \right) x^2 \right]^2}.$$

Les valeurs de x qui rendent y maximum ou minimum sont données par :

$$x^2 - \frac{8}{a} x + \frac{1}{1 + \frac{a^2}{8}} = 0,$$

$$x = \frac{4}{a} \pm \sqrt{\frac{16}{a^2} - \frac{1}{1 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{4}{a} \pm \frac{4}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{16 \left(1 + \frac{a^2}{8} \right)}},$$

$$x = \frac{4}{a} \pm \frac{4}{a} \left(1 - \frac{a^2}{32} \right),$$

$$x' = \frac{8}{a}, \quad x'' = \frac{a}{8},$$

en négligeant les termes en a^2 à côté de 1.

Pour $x = \frac{8}{a}$, $y = \frac{-a^3}{128}$.

Pour $x = \frac{a}{8}$, $y = \frac{a}{2}$.

En observant que toutes les valeurs de y sont assez faibles pour que l'on puisse confondre $\operatorname{tg} \psi$ et ψ , on obtient pour les variations de ψ en fonction de θ le tableau suivant :

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{a}$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{8}{a}$	$\frac{\pi}{2}$
$x = \operatorname{tg} \theta$	$-\infty$	1	0	$\frac{a}{8}$	1	$\frac{4}{a}$	$\frac{8}{a}$	$+\infty$
$y = \psi$	0	$\nearrow \frac{a}{4}$	$\nearrow \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\searrow \frac{a}{4}$	$\searrow 0$	$\searrow \frac{a^3}{128}$	0
				max.			min.	

ψ reste donc petit, avec pour maximum $\frac{a}{2}$ quand θ passe par zéro.

Les valeurs négatives sont négligeables.

LISTE DES TRAVAUX CITÉS DANS LA PREMIÈRE PARTIE

- [1] A. ANDRONOW, *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues*. C. R. Ac. Sc. T. 189, p. 559; 14 octobre 1929.
 - [2] L. B. ARGUIMBAU, *An oscillator having a linear operating characteristic*. Proc. Inst. Rad. Eng., vol. 21, pp. 14-28; janvier 1933.
 - [3] H. BARKHAUSEN, *Lehrbuch der Electronen-Rohren und ihrer technischen Anwendungen*. Leipzig, Hirzel, 1931. — Trad. franç. *Les tubes à vide et leurs applications*. Paris, Dunod, 1933.
 - [4] R. FORTRAT, *Introduction à l'étude de la Physique théorique*. II^e Fasc. *Les Vibrations*, n° 14. Paris, Hermann, 1927.
 - [5] J. GROSZKOWSKI, *Oscillators with automatic control of the threshold of regeneration*. Proc. I. R. E., vol. 22, pp. 145-151; février 1934.
 - [6] C. GUTTON, *La lampe à trois électrodes*. Paris, Blanchard, 1925.
 - [7] C. GUTTON, *Radiotechnique générale*. Paris, Baillière, 1926.
 - [8] Ph. LE CORBEILLER, *Les systèmes autoentretenus et les oscillations de relaxation*. Paris, Hermann, 1931.
 - [9] Ph. LE CORBEILLER, *Le mécanisme de la production des oscillations*. Ond. Electr. T. 12, pp. 116-148; 1933.
 - [10] A. LIÉNARD, *Étude des oscillations entretenues*. Rev. gén. de l'Électr. T. 23, pp. 901-912 et 946-954; 1928.
 - [11] J. MERCIER, *Les circuits oscillants*. Paris, Delagrave, 1934.
 - [12] R. MESNY, *Radio-électricité générale*. Paris, Chiron, 1935.
 - [13] B. VAN DER POL, *Oscillations sinusoïdales et de relaxation*. Ond. Electr. T. 9, pp. 245-256 et 293-312; 1930.
 - [14] B. VAN DER POL, *The nonlinear theory of electric oscillations*. Proc. I. R. E., vol. 22, pp. 1051-1086; septembre 1934.
 - [15] Y. ROCARD, *Relaxation, Synchronisation et démultiplication de fréquence*. Ond. Electr. T. 16, pp. 396-413; 1937.
 - [16] Y. ROCARD, *Théorie des oscillateurs*. Paris, Éditions de la Revue Scientifique, 1941.
-

SECONDE PARTIE

ÉTUDE TECHNIQUE

CHAPITRE PREMIER

Étude d'ensemble. Équations du mouvement.

Conditions à réaliser.

Nous allons donner au début de ce chapitre une description délibérément sommaire du pendule et de son dispositif d'entretien. Cette description, jointe aux explications déjà fournies dans l'Introduction, suffira à donner au lecteur une première idée de la technique employée et nous permettra de former l'équation du mouvement du pendule. La comparaison de cette équation avec l'équation théorique étudiée dans la première partie et la détermination des paramètres a et b en fonction des constantes expérimentales fixeront les conditions à remplir pour vérifier les hypothèses qui nous ont servi de point de départ.

Nous indiquerons au cours des chapitres suivants comment nous avons réalisé ces conditions et nous serons ainsi amené à compléter notre première description par une étude plus détaillée des diverses parties de l'installation et par le calcul numérique des constantes.

35. Choix du type de pendule et de la fréquence. — Nous avons choisi, pour appliquer les principes exposés dans la première partie de notre travail, un pendule élastique constitué par une masse pesante suspendue à l'extrémité inférieure d'un ressort hélicoïdal à axe vertical, et oscillant à la fréquence d'un cycle par seconde.

La pesanteur a pour effet statique d'augmenter d'une quantité déterminée la longueur du ressort au repos et n'intervient dans les conditions dynamiques de l'oscillation que pour orienter suivant la verticale le déplacement de la masse. Une variation lente de la gravité n'a donc aucune influence sur la période. Il en serait de même de toute autre force permanente ou lentement variable.

Les spires du ressort restent très rapprochées au cours de l'oscillation. Ceci provient de ce qu'à la fabrication le fil a subi, en même temps qu'on l'enroulait en spires jointives sur un mandrin, une torsion de sens contraire à celle que produit un espacement des spires. Les spires du ressort dégagées du mandrin restent fortement appuyées les unes sur les autres et une traction notable est nécessaire pour les desserrer [2]. Dans ces conditions et moyennant certaines précautions, le mouvement oscillatoire du poids suspendu au ressort se réduit à un mouvement de *translation*. C'est là le principal avantage de ce type d'oscillateur, les conséquences en apparaîtront au cours de notre étude.

Par un choix convenable des constantes du ressort et de la charge nous avons fixé la période à un cycle par seconde. Cette durée et l'amplitude de l'élongation qu'elle autorise (environ un centimètre) permettent de suivre plus aisément les phénomènes d'amortissement et d'entretien et se prêtent à des mesures plus précises. La comparaison de la période avec celle des horloges des divers observatoires est également facilitée, grâce aux signaux radiotélégraphiques.

36. Description du dispositif d'entretien. — La masse pesante suspendue au ressort est constituée par un aimant permanent que nous supposerons pour l'instant droit, sa forme définitive devant être déduite des considérations que nous allons exposer. La moitié inférieure de cet aimant plonge dans l'intérieur d'une bobine dont l'axe est vertical et qui porte deux enroulements. L'un $p\ p'$ est intercalé sur le circuit plaque d'une lampe triode, l'autre $g\ g'$ est inséré entre la grille et un organe détecteur fournissant la tension de polarisation négative de cette grille (*fig. 1*).

L'oscillation de l'aimant à l'intérieur de la bobine engen-

dre aux bornes du circuit $g g'$ une force électromotrice d'induction fonction de la vitesse de l'aimant.

La tension alternative transmise à la grille provoque des variations périodiques du courant plaque qui, en circulant dans l'enroulement $p p'$ exerce sur l'aimant une force électromagnétique alternative susceptible d'entretenir son mouvement en annulant l'action de l'amortissement.

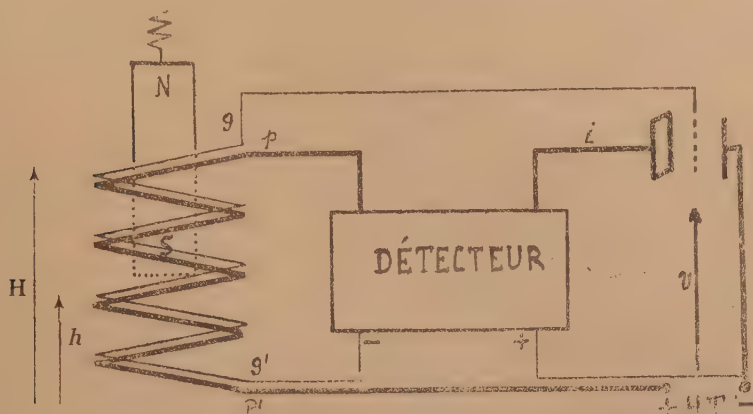


FIG. 1.

L'organe détecteur, dont nous spécifierons le type et le mode d'action après avoir étudié les conditions à lui imposer, rend la *tension moyenne* de la grille fonction de l'amplitude du courant plaque ou de la tension grille. Toute variation de la tension moyenne de la grille engendre une variation de la pente de la caractéristique courant plaque-tension grille et la puissance restituée au pendule est ainsi rendue fonction de son amplitude.

37. Équation aux variations d'énergie du pendule et de son dispositif d'entretien. — Si sommaire qu'elle soit, la description que nous venons de donner du pendule et de son dispositif d'entretien va nous permettre d'écrire, à partir du principe de conservation de l'énergie, l'équation du premier ordre entre la position et la vitesse de l'aimant. Nous allons pour cela former successivement les expressions de l'énergie potentielle, de l'énergie cinétique, de l'énergie dissipée par unité de temps et de l'énergie restituée par unité de temps.

1) *Expression de l'énergie potentielle.* Soit z le déplacement vertical de l'aimant à partir de sa position d'équilibre. On démontre⁽¹⁾, dans l'hypothèse d'une déformation parfaitement élastique du ressort et pour le cas particulier où les spires sont très rapprochées, que la force engendrée par le déplacement lui est proportionnelle. Le coefficient de proportionnalité s est donné par la relation suivante :

$$(1) \quad s = \frac{\pi \mu d^2}{8LD},$$

dans laquelle μ représente le module de Coulomb, d le diamètre du fil, L sa longueur, D le diamètre moyen de l'hélice.

De l'expression sz de la force on déduit celle de l'énergie potentielle, égale à $\frac{1}{2} sz^2$.

2) *Expresion de l'énergie cinétique.* Soient M la masse de l'aimant et V sa vitesse de translation verticale, soit m la masse du ressort.

Considérons un élément de fil de longueur dl situé sur l'hélice à la distance l de l'extrémité supérieure fixe du ressort. Sa masse est $m \frac{dl}{L}$ et sa vitesse $V \frac{l}{L}$. Son énergie cinétique est donc égale à $\frac{1}{2} m \frac{dl}{L} V^2 \frac{l^2}{L^2}$.

L'énergie cinétique totale de l'oscillateur est alors :

$$(2) \quad W = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} m \frac{V^2}{L^2} \int_0^L l^2 dl = \frac{1}{2} \left(M + \frac{m}{3} \right) V^2.$$

3) *Expression de l'énergie dissipée par unité de temps.* Le mouvement ordonné des molécules de l'aimant et du ressort se transforme partiellement en mouvement désordonné, soit à l'intérieur du ressort, soit dans l'air. Si le ressort est dépourvu d'hystérésis et de réactivité et si on élimine les mouvements de *convection* de l'air par un vide assez poussé, la loi de dissipation de l'énergie est de nature *statistique* et on doit

1. Nous renvoyons pour cette démonstration aux traités d'élasticité, par exemple à la *Mécanique physique* de Bouasse, §§ 117, 118 [1].

s'attendre à ce que la vitesse de perte d'énergie soit à chaque instant proportionnelle à la valeur actuelle de l'énergie cinétique. L'énergie dissipée par unité de temps est alors donnée par une expression de la forme : rV^2 .

4) *Expression de l'énergie restituée par unité de temps.* Déterminons d'abord l'expression de la force électromagnétique exercée par l'enroulement $p\ p'$ sur l'aimant à un instant t . Considérons, dans la position occupée par l'aimant à cet instant, le flux du vecteur induction magnétique à travers la surface d'une spire quelconque de l'enroulement. Ce flux est une fonction $\varphi(h)$ de la position occupée par la spire considérée au-dessus de l'extrémité inférieure de la bobine (cf. fig. 1).

Faisons subir à cette spire une translation virtuelle dh d'où résulte une augmentation de flux $d\varphi$. En désignant par i le courant anodique à l'instant t , le produit $i \frac{d\varphi}{dh}$ représente la part contributive de la spire à la force électromagnétique totale.

Une section de l'enroulement située à la hauteur h et d'épaisseur dh contient un nombre de spires égal à ndh , en désignant par n le nombre de spires par centimètre de l'enroulement plaque. Soit H la hauteur de la bobine, la force électromagnétique totale F est donnée par :

$$F = \int_0^H ni \frac{d\varphi}{dh} dh = ni [\varphi(H) - \varphi(0)].$$

Si le rapport du déplacement maximum de l'aimant à sa longueur est assez faible pour que le flux $\varphi(H)$ à travers la surface de la section supérieure de l'enroulement reste toujours égal au flux total Φ traversant la section médiane de l'aimant et si la bobine est assez longue pour que le flux $\varphi(0)$ à travers la surface de la section inférieure de la bobine soit toujours nul, on peut écrire :

$$(3) \quad F = ni\Phi.$$

Le courant anodique i est relié à la tension de grille v par la relation :

$$(i - i_0) = S(v - v_0).$$

S représente la pente moyenne de la caractéristique dyna-

mique (i , v) de la lampe triode utilisée; i_0 et v_0 sont les valeurs du courant et de la tension en l'absence d'oscillations.

Le montage *différentiel* de deux lampes, montage dont nous justifierons plus loin l'emploi, permet d'écrire :

$$(4) \quad i = Sv$$

en désignant par i et v les différences respectives des courants plaque et des tensions grille de chaque lampe, et par S la pente moyenne de la caractéristique dynamique *effective* correspondant au montage différentiel.

D'autre part v est la tension due à la force électromotrice d'induction engendrée par le déplacement de l'aimant dans l'axe de l'enroulement gg' . Soit N le nombre de spires par centimètre de cet enroulement. Si nous supposons les enroulements de plaque et de grille bobinés en sens inverse, la réciprocité des phénomènes électromagnétiques et des phénomènes d'induction entraîne :

$$(5) \quad v = \int_0^H NV \frac{d\phi}{dh} dh = NV [\phi(H) - \phi(0)] = NV \Phi.$$

L'élimination de i et de v entre les équations (3), (4) et (5) donne :

$$F = nNS\Phi^2V.$$

L'énergie restituée par unité de temps est alors égale à $nNS\Phi^2V^2$.

Posons :

$$(6) \quad r' = nNS\Phi^2.$$

et écrivons que pendant l'intervalle de temps dt la variation totale d'énergie est nulle :

$$szdz + \left(M + \frac{m}{3}\right) VdV + (r - r') V^2 dt = 0,$$

ou :

$$szdz + \left(M + \frac{m}{3}\right) VdV + (r - r') V dz = 0,$$

Aux variables z et V substituons les variables x et y définies par :

$$x = \sqrt{\frac{s}{2}} z, \quad y = \sqrt{\frac{M + \frac{m}{3}}{2}} V,$$

il vient :

$$x dx + y dy + \frac{r - r'}{\sqrt{s \left(M + \frac{m}{3} \right)}} y dx = 0.$$

Écrivons :

$$(7) \quad \frac{r - r'}{\sqrt{s \left(M + \frac{m}{3} \right)}} = \frac{r - r'}{\omega \left(M + \frac{m}{3} \right)} = 2R \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{s}{M + \frac{m}{3}}} \right).$$

Nous obtenons :

$$(8) \quad x dx + y dy + 2R y dx = 0,$$

identique à l'équation (14) d'un oscillateur « série » (cf. n° 14).

38. Relation entre le coefficient d'amortissement et l'amplitude. Identification des paramètres théoriques et des constantes expérimentales. — Pour obtenir l'équation d'un oscillateur à amplitude autostabilisée il faut adjoindre à l'équation (8) une relation entre R et l'amplitude instantanée. Celle que nous avons étudiée dans la première partie de notre travail est la relation linéaire :

$$(9) \quad R = -a + bA(x, y),$$

à laquelle nous avons ensuite substitué le groupe des deux relations suivantes (cf. n° 34) :

$$\begin{aligned} R &= -a, & \text{pour } A(x, y) < A_0, \\ R &= -a_0 + b[A(x, y) - A_0], & \text{pour } A(x, y) > A_0. \end{aligned}$$

C'est le détecteur qui doit permettre de réaliser l'une ou

l'autre hypothèse. Déterminons les conditions exigées par la seconde. Les relations (6) et (7) permettent d'écrire :

$$(10) \quad R = \frac{1}{2\omega} \frac{r - nNS\Phi^2}{\left(M + \frac{m}{3}\right)}.$$

Supposons que tous les coefficients du second membre de (10) soient constants sauf S et posons :

$$(11) \quad \begin{aligned} S &= S_0 && \text{pour } A(x, y) < A_0, \\ S &= S_0 - K[A(x, y) - A_0] && \text{pour } A(x, y) > A_0. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs de S dans (10) il vient :

$$(12) \quad R = \frac{1}{2\omega} \frac{r - nNS_0\Phi^2}{\left(M + \frac{m}{3}\right)} \quad \text{pour } A(x, y) < A_0,$$

$$(13) \quad R = \frac{r - (S_0 + KA_0)nN\Phi^2 + KnN\Phi^2 A(x, y)}{2\omega \left(M + \frac{m}{3}\right)} \quad \text{pour } A(x, y) > A_0.$$

Pour obtenir les valeurs de a et de b et appliquer les résultats des chapitres IV, V, VI de la première partie, il suffit d'identifier les coefficients des équations (9) et (13) :

$$(14) \quad -a = \frac{r - (S_0 + KA_0)nN\Phi^2}{2\omega \left(M + \frac{m}{3}\right)},$$

$$(15) \quad b = \frac{KnN\Phi^2}{2\omega \left(M + \frac{m}{3}\right)}.$$

39. Conditions à vérifier pour la génération d'oscillations sinusoïdales. — Au cours de l'exposé que nous venons de faire nous avons formulé un certain nombre de conditions qui doivent être toutes réalisées pour que le système d'entretien décrit soit capable d'engendrer des oscillations sinusoïdales stables. Nous allons les récapituler car elles constituent les normes auxquelles nous nous sommes efforcé de satisfaire par les dispositifs qui nous restent à décrire.

Condition A. Le ressort doit travailler dans un domaine de déformations pour lequel la force élastique développée soit proportionnelle à l'élongation (Constance du coefficient s).

Condition B. La vitesse de perte d'énergie doit être à chaque instant proportionnelle à la valeur actuelle de l'énergie cinétique (Constance du coefficient r).

Condition C. Le flux de l'induction magnétique à travers la surface de la section supérieure des enroulements doit être égal au flux total et le flux à travers la section inférieure doit être nul, et cela dans toutes les positions occupées par l'aimant [$\varphi(H) - \varphi(0) = \Phi$].

Condition D. Les spires des enroulements plaque et grille doivent être régulièrement réparties le long de la bobine (Constance des coefficients n et N).

Condition E. L'intensité du courant modulé par le relais à lampes doit être proportionnelle à la tension de commande quand l'amplitude a atteint sa valeur de régime (Constance de la valeur-limite de S).

Condition F. Le coefficient de proportionnalité S doit varier linéairement en fonction de la différence existant entre la valeur actuelle de l'amplitude $A(x, y)$ et une amplitude de seuil A_0 , sa valeur S_0 pour une amplitude inférieure à A_0 devant assurer l'amorçage (Constance du coefficient K) ⁽¹⁾.

1. Ces six conditions ont été formulées dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 1^{er} juin 1942. *Comptes rendus*, T. 214, p. 875.

CHAPITRE II

Étude du ressort.

Vérification des conditions A et B.

40. Étude statique du ressort. Valeur du coefficient s . — Le ressort est constitué par un fil d'Elinvar de 9 mètres de longueur et de $1^{\text{mm}},03$ de diamètre, enroulé en hélice à droite. Le diamètre du cylindre extérieurement tangent à l'hélice mesure $16^{\text{mm}},25$. Chaque spire a donc un diamètre moyen de $15^{\text{mm}},22$ et une longueur de $4^{\text{cm}},78$ et le ressort compte 188 spires. A chaque extrémité le fil quitte l'hélice pour venir se replier une première fois suivant l'axe et une seconde fois en forme de crochet.

Pour faire l'étude statique du ressort on fixe l'extrémité supérieure et on suspend à l'extrémité inférieure un micromètre divisé en 100 dixièmes de millimètre et un plateau pouvant recevoir différentes charges.

Un microscope horizontal muni d'un oculaire à réticule peut être élevé ou abaissé le long d'une colonne verticale et sa position peut être réglée avec précision en sorte que, pour différentes charges placées successivement sur le plateau, le fil horizontal du réticule soit chaque fois en coïncidence optique avec le zéro du micromètre.

Une surcharge de 10 grammes est alors mise sur le plateau et la nouvelle position d'équilibre est observée après un freinage rapide des oscillations. On vérifie le retour au zéro en enlevant la surcharge et la même mesure est recommencée plusieurs fois pour chaque charge.

Les résultats sont donnés par le graphique de la figure 2 où les charges sont portées en abscisse et les allongements produits par la surcharge en ordonnée.

On voit que pour des charges variables supérieures à 200 grammes l'allongement provoqué par la surcharge reste constant et égal à 6 mm. 6.

Les mesures n'ont pas été prolongées au delà de 400 grammes pour éviter le risque d'une déformation permanente du ressort, mais une étude semblable a été faite pour un ressort en acier ordinaire ayant les mêmes caractéristiques et la constance de l'allongement a été vérifiée entre 200 et 1.000 grammes.

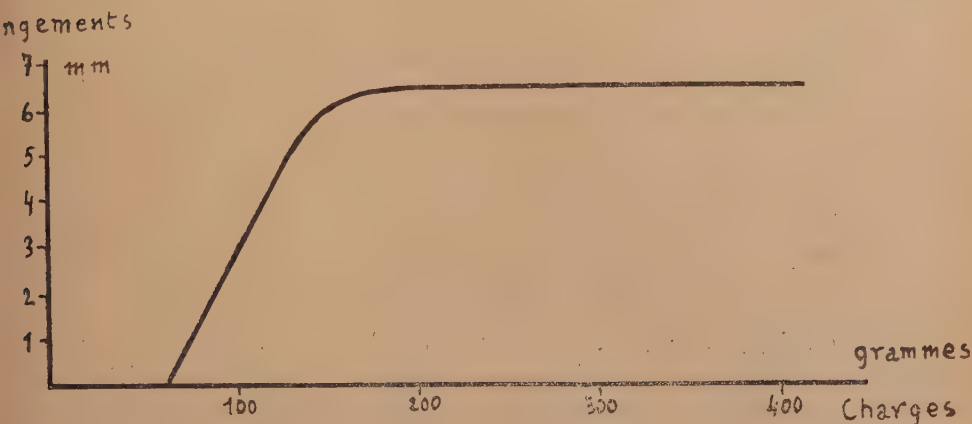


FIG. 2.

Du rapport de l'allongement à la surcharge on déduit la valeur du coefficient s qui en est l'inverse :

$$s = \frac{10 \times 980}{0,66} = 14.850 \text{ dynes par centimètre.}$$

L'approximation de ce nombre est limitée par celle de la lecture du micromètre et ne dépasse pas deux millièmes, mais la constance de s est vérifiée avec une précision très supérieure à celle de sa mesure par suite de la répétition de cette mesure dans un domaine très étendu des valeurs de la charge.

41. Étude dynamique du ressort. Valeur à donner à M . — Ayant mesuré s nous pouvons calculer la valeur à donner à M pour que la fréquence soit égale à un cycle par seconde. La période T a pour expression :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{m}{3}}{s}}.$$

Posons $T = 1$:

$$M + \frac{m}{3} = \frac{s}{4\pi^2} = \frac{14.850}{39,45} = 376 \text{ gr.}$$

La masse m du ressort est égale à 62 gr. 06. D'où :

$$M = 376 - \frac{62,06}{3} = 355 \text{ gr. 3.}$$

La masse de l'aimant, que nous décrirons plus loin, est d'environ 353 grammes. Des masses additionnelles déposées sur la traverse supérieure permettent de faire l'appoint.

A l'aide de masses étalonnées il est facile d'obtenir des périodes inférieures ou supérieures à la seconde d'environ $\frac{1}{600}$ et de comparer par une méthode stroboscopique la marche du pendule avec celle d'une horloge battant la seconde, l'intervalle de deux coïncidences étant d'environ dix minutes. On calcule par interpolation la masse additionnelle correspondant au réglage précis de la période à une seconde.

Pour l'étude de l'amortissement, le pendule est placé dans une atmosphère raréfiée. Il peut être lancé à une amplitude convenable par des émissions rythmées de courant envoyées dans la bobine d'entretien. On observe dans une lunette munie d'un oculaire à micromètre l'image d'une fente fine disposée au sommet de l'aimant et éclairée sur toute sa trajectoire. On note les époques auxquelles les maxima correspondent à des divisions exactes du micromètre.

42. Vérification des conditions A et B. Valeur du coefficient r .

— Nous avons vu que le coefficient s restait constant pour des charges variables supérieures à 200 grammes. De sa valeur nous avons déduit celle de la masse M correspondant à la fréquence d'un cycle par seconde et nous l'avons trouvée notablement supérieure à 200 grammes, en sorte que la condition A est satisfaite.

Pour vérifier la condition B nous utiliserons les mesures d'amortissement, faites comme il vient d'être dit, et nous les grouperons de façon à faire apparaître la constance du temps nécessaire à une réduction de l'amplitude à la moitié de sa valeur.

Le tableau suivant donne les résultats relatifs à une pression de 5 mm. de mercure :

Amplitudes.	Époques t_1 .	Amplitudes.	Époques t_2 .	$t_2 - t_1$
40	9 ^h 20' 40"	20	9 ^h 53' 40"	35'
38	23 10	19	58 10	35
36	26 00	18	10 01 05	35 05"
34	28 50	17	03 50	35
32	32 00	16	07 00	35
30	35 10	15	10 05	34 55

La constance de l'intervalle de temps $t_2 - t_1$, au cours duquel l'amplitude est réduite de moitié, vérifie la condition B et sa mesure nous permet de calculer le décrement logarithmique δ et le coefficient r .

Le nombre d'oscillations effectuées au cours du temps $t_2 - t_1$ est égal à $\frac{t_2 - t_1}{T}$, le décrement logarithmique est alors donné par :

$$\delta = \frac{T}{t_2 - t_1} \text{Log}_e 2.$$

et le coefficient d'amortissement par :

$$\frac{r}{2 \left(M + \frac{m}{3} \right)} = \frac{\delta}{T} = \frac{\text{Log}_e 2}{t_2 - t_1}.$$

Ces relations donnent :

$$\delta = \frac{0,693}{35 \times 60} = 33 \times 10^{-5},$$

$$r = 2 \times 376 \times 33 \times 10^{-5} = 0,248 \text{ dyne par cm. par sec.}$$

CHAPITRE III

Étude de l'aimant et des enroulements. Vérification des conditions C et D.

43. **Forme et matériaux de l'aimant.** — Dans la description du dispositif d'entretien donnée ci-dessus (n° 36) nous avons supposé l'aimant droit. Cette forme entraîne une dispersion du champ magnétique nuisible à la conservation de l'aimantation et à sa bonne utilisation.

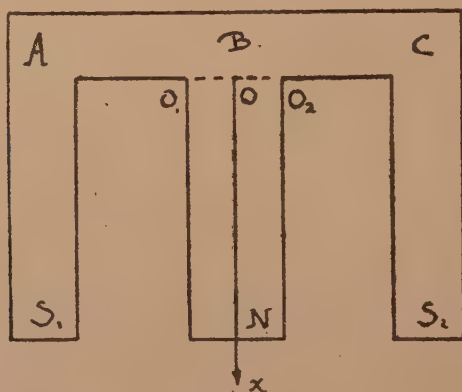


FIG. 3.

Il est préférable de rapprocher l'un de l'autre les pôles de l'aimant et de dédoubler l'un d'eux en bifurquant le circuit magnétique, en sorte que la force électromagnétique appliquée par l'enroulement plaque soit dirigée suivant l'axe du ressort. La forme de la figure 3 est la plus simple qui satisfasse à ces exigences, mais elle rend particulièrement difficile la vérification de la condition C.

La première partie de cette condition suppose en effet que la totalité du flux magnétique de l'aimant pénètre en permanence dans la partie supérieure de la bobine au cours de l'oscillation. Le flux doit donc être entièrement canalisé dans le barreau horizontal ABC et dans la partie supérieure des trois

barreaux verticaux AS_1 , BN , CS_2 . Ceci n'est possible que si cette partie de l'aimant possède une perméabilité magnétique considérablement supérieure à celle de l'air.

La conservation de l'aimantation avec le temps exige d'autre part que l'acier à aimant utilisé soit caractérisé par un champ coercitif élevé. Aucun alliage magnétique n'est susceptible de satisfaire simultanément à ces deux exigences. Nous avons donc constitué l'aimant en plusieurs pièces à l'aide de matériaux différents.

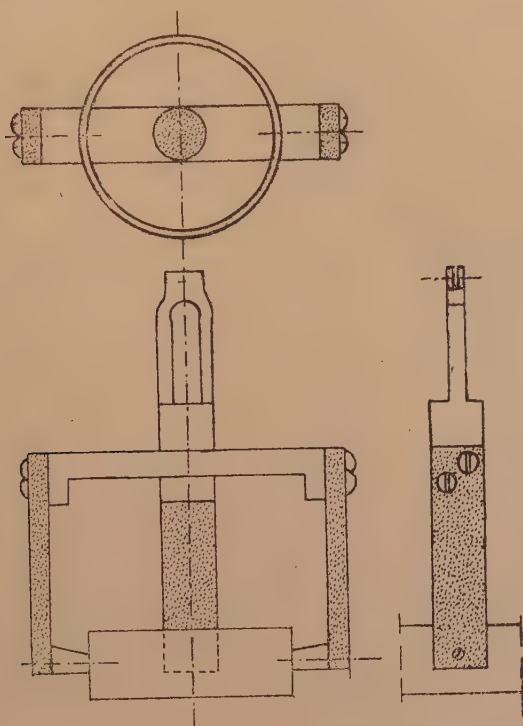


FIG. 4.

Nous avons fait choix d'une part d'un alliage de fer et de nickel, l'Anhyster D des aciéries d'Imphy, et d'autre part d'un alliage de fer et de cobalt à 35 % de cobalt. La perméabilité du premier peut atteindre 25.000, moyennant un traitement thermique approprié. Le champ coercitif du second atteint 260 œersteds.

Pour réaliser la seconde partie de la condition C sans donner à la bobine une longueur exagérée, il faut que le champ magnétique s'annule sur la verticale à une distance aussi petite que possible de la partie inférieure de l'aimant. A cette fin, les extrémités inférieures des barreaux AS_1 et CS_2 sont reliées par un cylindre en alliage à haute perméabilité entourant complètement l'extrémité du barreau central.

Le croquis à l'échelle 1/2 de la figure 4 donne les formes, les dimensions et le mode d'assemblage des diverses pièces de l'aimant. Le barreau du milieu en ferrocobalt est à section circulaire, tandis que les barreaux latéraux ont leur section rectangulaire. La traverse en ferronickel est évidée de façon à ce qu'une portion de la partie centrale taillée en forme de cylindre prolonge le barreau cylindrique de ferrocobalt et puisse pénétrer à sa suite à l'intérieur de la bobine, tandis que les extrémités taillées en forme d'équerre ont une large surface de contact avec les barreaux prismatiques.

Dans le prolongement du barreau central, au-dessus de la traverse horizontale, est fixée une pièce de duralumin dans l'extrémité supérieure de laquelle est taillée une rainure où vient s'engager le crochet inférieur du ressort. Une fenêtre allongée y est découpée, qui peut recevoir un volet, non représenté sur le croquis, portant la fente destinée aux mesures optiques.

Tous les assemblages sont faits par vis.

44. Distribution du flux d'induction. Vérification de la condition C. — Entourons le barreau central de l'aimant d'une petite bobine plate et amenons-la d'abord au contact avec la face inférieure de la traverse en $O_1 O_2$ (fig. 3). Puis, après l'avoir reliée à un fluxmètre, déplaçons-la le long de l'axe Ox assez loin pour que le flux s'annule. La variation de flux mesurée donne la valeur du flux à travers la section $O_1 O_2$ du barreau central. Plaçons la bobine successivement à des distances croissantes de la ligne $O_1 O_2$ et éloignons-la chaque fois en dehors du champ comme précédemment. En portant en abscisse les distances de départ x et en ordonnée les valeurs correspondantes du flux, nous obtenons la courbe $\varphi(x)$,⁴ qui nous fait connaître la distribution du flux dans l'aimant le long de l'axe Ox (fig. 5).

La courbe débute par un palier horizontal long d'environ 1 cm. 6. On en conclut que pour une position d'équilibre convenable de l'aimant relativement à la bobine, et pour une

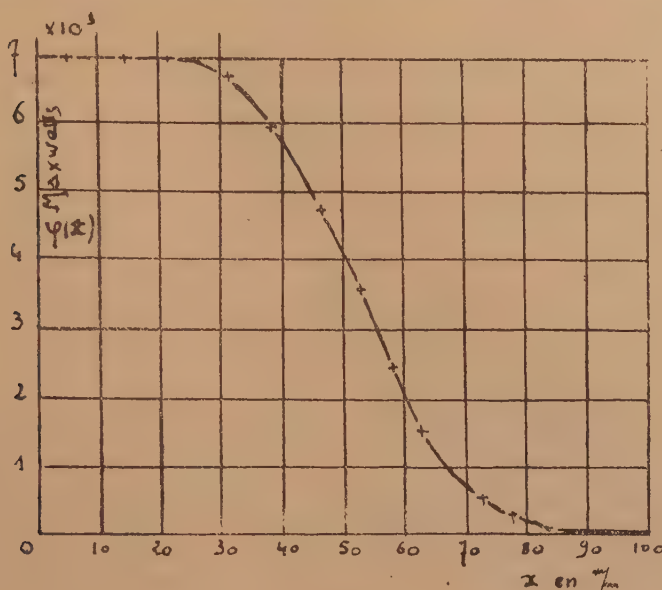


FIG. 5.

amplitude d'oscillation ne dépassant pas 0 cm. 8, la totalité du flux d'induction traversera en permanence la section supérieure des enroulements. Il suffit d'autre part que la bobine ait dix centimètres de longueur pour que le flux sortant de la partie inférieure soit constamment nul. La condition C est donc vérifiée et $\Phi = 7 \times 10^3$ maxwells.

45. Étude des enroulements. Vérification de la condition D. —

Pour que les nombres de spires par centimètre des enroulements plaque et grille n et N soient constants le long de la bobine, le bobinage doit être fait avec un soin particulier et une surveillance de tous les instants. L'opération est longue et délicate mais n'appelle aucun commentaire.

Nous avons, par contre, à faire connaître et à justifier les valeurs de n et N . Ces valeurs n'interviennent dans les équations (6) à (15) que par leur produit, il faut donc déterminer leur rapport.

De nombreuses raisons nous ont conduit à adopter une valeur particulièrement élevée du rapport $\frac{N}{n}$. Voici les principales :

1° L'amplitude de la tension grille v croît avec N et on verra au chapitre suivant la nécessité de lui donner une valeur élevée;

2° L'impédance du circuit plaque décroît avec n et il y a avantage à ce qu'elle soit négligeable devant la résistance intérieure des lampes;

3° Le couplage des circuits plaque et grille est d'autant plus faible que $\frac{N}{n}$ est plus grand. Une valeur élevée de $\frac{N}{n}$ permet d'éviter l'emploi d'un transformateur de découplage, qui serait sans cela nécessaire.

Les valeurs finalement adoptées à la suite de divers essais sont les suivantes : $n = 1$; $N = 4.212$.

CHAPITRE IV

Étude du relais à lampes et du détecteur.

Vérification des conditions E et F.

Le montage sommairement décrit au n° 36 et représenté par la figure 1 n'est qu'un montage de principe destiné à montrer le rôle du relais à lampes, qui est de fournir un courant i proportionnel à la tension v , et celui du détecteur, qui est de faire varier lentement le coefficient de proportionnalité S en fonction de l'amplitude.

Ce résultat ne peut être obtenu avec une seule lampe à pente variable que si les variations du courant et de la tension sont assez petites pour que l'on puisse confondre l'arc de caractéristique décrit avec la corde qui le sous-tend.

Nous allons voir que le montage différentiel de deux lampes identiques à caractéristique parabolique permet d'obtenir une caractéristique effective rectiligne étendue, dont la pente est une fonction linéaire de la tension de polarisation des grilles.

Nous verrons ensuite comment cette tension de polarisation peut elle-même devenir, grâce au détecteur, une fonction linéaire de l'amplitude.

46. Propriétés du montage différentiel de deux lampes identiques à caractéristique parabolique. -- Le principe du montage différentiel consiste à envoyer dans les deux moitiés symétriques d'un enroulement les courants plaque de deux lampes, aux grilles desquelles on applique des potentiels alternatifs égaux et de sens contraire, en sorte que les actions électromagnétiques dues aux parties variables des deux courants plaque s'ajoutent tandis que les actions dues aux parties constantes s'annulent.

L'opposition de phase des potentiels appliqués aux grilles peut s'obtenir par différentes méthodes, la plus simple consiste à dédoubler le circuit de grille comme le circuit de pla-

que par une prise médiane à laquelle est appliquée la tension commune de polarisation des grilles.

La *caractéristique effective* du montage différentiel s'obtient aisément par la construction de la figure 6.

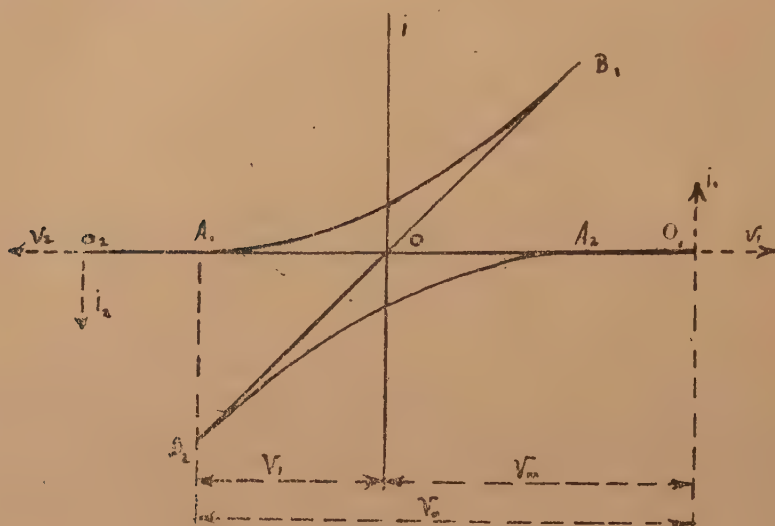


FIG. 6.

Traçons les caractéristiques courant plaque-tension grille $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ de deux lampes identiques relativement à deux systèmes de coordonnées, dont les origines O_1 et O_2 sont distantes du double de la tension commune de polarisation des grilles et dont les axes $O_1 v_1$ et $O_2 v_2$ sont orientés en sens inverse en prolongement et de part et d'autre du segment $O_1 O_2$, tandis que les axes $O_1 i_1$ et $O_2 i_2$ sont orientés en sens inverse perpendiculairement à $O_1 O_2$.

Adoptons un nouveau système d'axes $O v i$, ayant comme origine le point O , milieu de $O_1 O_2$, et même orientation que le système $O_1 v_1 i_1$. Si les caractéristiques sont paraboliques, leurs équations, rapportées au système $O v i$, sont, en désignant par V_1 la valeur absolue des segments $O_1 A_1$ et $O_2 A_2$:

$$i_1 = C(V_1 + v)^2,$$

$$i_2 = -C(V_1 - v)^2.$$

La caractéristique effective du montage différentiel s'ob-

tient en faisant la somme algébrique des ordonnées des deux courbes $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$.

$$i = i_1 + i_2 = 4CV_1 v.$$

Soient V_0 la valeur absolue de la tension négative de grille pour laquelle le courant plaque s'annule et V_m la valeur absolue de la tension de polarisation négative des grilles, on voit sur la figure 6 que $V_1 = V_0 - V_m$, d'où pour l'expression de la pente S :

$$(16) \quad S = 4CV_1 = 4C(V_0 - V_m).$$

La démonstration qui précède suppose les caractéristiques paraboliques. Mais cette condition n'est pas nécessaire. Il est facile de voir que la condition à la fois nécessaire et suffisante pour que i soit proportionnel à v est que, en développant en série $i_1 = f(v)$ suivant les puissances entières de v , le développement ne contienne pas de puissances impaires supérieures à la première. Nous indiquerons plus loin une méthode de mesure permettant de s'assurer que cette condition est vérifiée.

47. Rôle du détecteur. Propriétés de la détection linéaire. — L'équation (16) montre que la pente S de la caractéristique rectiligne obtenue par le montage différentiel est une fonction linéaire de la tension de polarisation V_m des grilles. Le rôle du détecteur est de rendre cette tension de polarisation elle-même fonction linéaire de l'amplitude.

Nous supposons connue la théorie générale de la détection et nous nous contentons de rappeler, en nous inspirant d'un exposé de R. Mesny, auquel nous renvoyons pour les démonstrations [3], les propriétés de la *détection linéaire*.

Le montage détecteur le plus sensible et le plus simple est celui du « condensateur shunté », c'est à lui que nous avons recours. Il utilise le fait que dans les lampes bien vidées le courant grille est nul pour toutes les valeurs de la tension grille inférieures à une tension déterminée et croît très rapidement au-dessus de cette tension.

Soit (fig. 7) un système d'axes Ovi . Supposons que la naissance du courant grille soit assez brusque pour que le début de la caractéristique AB puisse être assimilé à une droite de pente $\frac{1}{s}$.

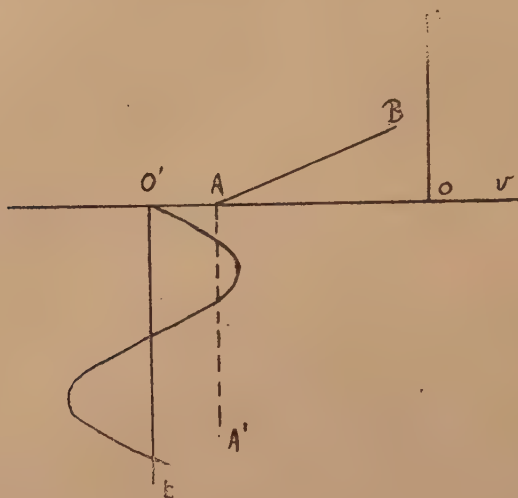


FIG. 7.

Soit O' la tension de polarisation de la grille à un instant quelconque, tension que nous supposons *lentement variable* par rapport à la période des oscillations. De O' abaissons perpendiculairement à l'axe Ov un axe des temps $O't$ et construisons dans le système $O'vt$ la courbe des oscillations transmises à la grille à travers le condensateur shunté.

Nous examinerons successivement deux cas :

Premier cas : A l'instant initial où s'amorcent les oscillations, O' coïncide avec A . Dès le début des oscillations la grille débite pendant les alternances positives un courant qui communique au condensateur une charge, que nous supposons ne se dissiper que très lentement par rapport à la période à travers la résistance R du shunt.

Une tension continue se développe aux bornes du condensateur qui croît avec l'amplitude de la tension alternative transmise à la grille. La tension de polarisation de la grille décroît d'autant, en sorte que l'axe $O't$ se déplace de AA' vers la gauche, au fur et à mesure que l'amplitude des oscil-

lations augmente. On démontre que la longueur de ce glissement est proportionnelle à l'amplitude, ce qui a fait donner à ce type de détection le nom de *détection linéaire* (1).

Si les deux lampes du montage différentiel fonctionnent simultanément de la même façon, le segment OO' , qui représente le paramètre V_m de la relation (16), croît linéairement en fonction de l'amplitude et la pente S de la droite $B_1 B_2$ de la figure 6 est une *fonction linéaire décroissante de l'amplitude*, à partir des amplitudes infiniment petites.

C'est la première des deux hypothèses rappelées au début du n° 38.

Deuxième cas : Supposons maintenant que la position initiale de O' soit à gauche de A , par exemple au point indiqué sur la figure 7, au moment où les oscillations s'amorcent. Tant que l'amplitude de la tension transmise à la grille est inférieure à $O'A$, le courant grille est nul, la tension de polarisation reste fixe et la pente S de la caractéristique du montage différentiel garde la valeur constante désignée par S_0 dans la relation (11).

Dès que l'amplitude dépasse $O'A$ d'une quantité suffisante pour que la quantité d'électricité débitée par la grille au voisinage du maximum de tension soit supérieure à celle qui s'écoule par la résistance R au cours d'une période, le condensateur prend une charge moyenne et l'axe $O't$ glisse vers la gauche. La seconde hypothèse étudiée au n° 38 est alors réalisée, elle correspond à la variante proposée au n° 34. Pour un choix convenable des divers paramètres expérimentaux figurant dans les relations (14) et (15), les oscillations d'amplitude infiniment petite naissant par autoamorçage augmentent exponentiellement jusqu'à la valeur $O'A$. L'amplitude tend ensuite vers une valeur constante légèrement supérieure.

48. Tracé expérimental de la caractéristique effective du montage différentiel. Vérification de la condition E. — Il nous reste à montrer comment il est possible de tracer expérimentale-

1. Il faudrait faire sur cette dénomination une réserve analogue à celle que nous avons formulée dans l'Introduction (n° 7) sur la dénomination d'*oscillateur linéaire*. La détection n'est pas un phénomène linéaire au sens mathématique de ce mot.

ment la caractéristique effective de deux lampes montées différemment et à vérifier que, pour un choix convenable de lampes et de paramètres de fonctionnement, cette caractéristique est **une droite**.

La méthode adoptée repose sur l'emploi conjugué d'un potentiomètre différentiel et d'un galvanomètre différentiel. Pour réaliser le premier nous avons tendu deux fils d'alliage de fer-nickel-chrome ayant chacun deux mètres de longueur parallèlement à une règle d'acier divisée de même longueur. Chaque fil a une résistance de 141 ohms. Un curseur constitué par une plaque rectangulaire d'ébonite percée d'une ouverture circulaire peut glisser, grâce à deux épaulements, le long de la règle d'acier; un index permet des lectures précises de la graduation.

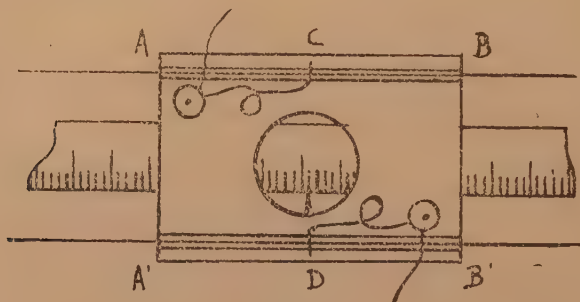


FIG. 8.

Les deux fils (cf. *fig. 8*) coulissent dans deux rainures AB et A'B' tracées à la scie dans l'ébonite et deux ressorts d'acier C et D viennent appuyer sur les fils dans une rainure transversale CD.

Les extrémités des deux fils sont reliées entre elles en croix et aux deux bornes, positive et négative, d'une batterie de deux éléments de nickel-cadmium de forte capacité. Entre le point milieu de cette batterie et les frotteurs C et D, on dispose de deux tensions, nulles quand la ligne CD est au milieu de la règle et variant symétriquement de 0 à $\pm 1v,35$ quand le curseur est déplacé vers la droite ou vers la gauche. Ces deux tensions sont appliquées entre les grilles des deux lampes à étudier et la borne négative d'un autre potentiomètre dont la borne positive est reliée aux cathodes des

deux lampes. Ce second potentiomètre permet de faire varier entre -1v et -3v la polarisation commune des lampes, la différence de potentiel introduite étant lue sur un voltmètre.

Les plaques des deux lampes sont réunies au pôle positif de la batterie anodique par l'intermédiaire des enroulements d'un milliampèremètre différentiel gradué de 0 à 1 milliampère.

Cette méthode permet l'examen rapide de couples de lampes de types divers et fonctionnant avec diverses valeurs des tensions d'alimentation.

Au premier abord on pourrait être tenté de recourir au type de lampe dit « à pente variable », utilisé pour la régulation « antifading ». Ce serait une erreur, car la courbure des caractéristiques est faible et leur forme plus voisine d'une hyperbole que d'une parabole. Il vaut mieux recourir à des lampes destinées à une amplification linéaire, mais travaillant sous des tensions anodiques très inférieures à celles qui sont prévues par le constructeur et dont le point de fonctionnement se trouve ainsi amené dans la région courbe initiale des caractéristiques.

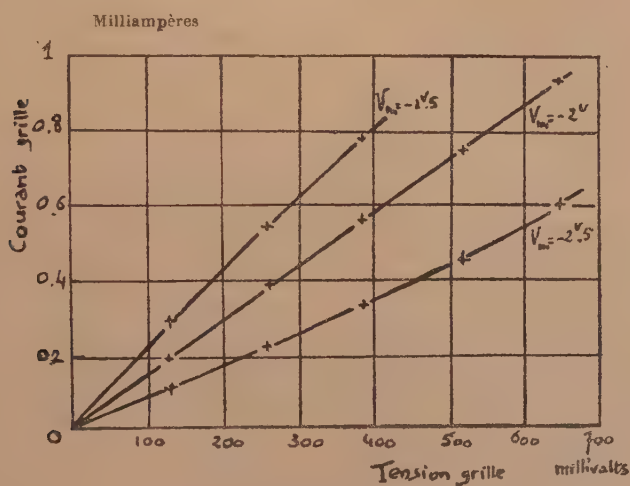


FIG. 9.

Après divers essais nous avons fait choix de lampes à écran de type américain 257 ou 6C6, qui ne diffèrent que par la tension de chauffage. Leur résistance interne est très élevée (de 1 à 2 mégohms), ce qui rend négligeables les réactions des

circuits intercalés sur les plaques et permet de confondre les caractéristiques statiques et dynamiques.

La figure 9 donne le résultat des mesures effectuées sur deux 6C6, travaillant sous 100 volts plaque et 50 volts écran, pour des tensions de polarisation de $-1v,5$; $-2v$; et $-2v,5$. La courbe du milieu est droite, les deux autres présentent une légère courbure en sens inverse l'une de l'autre. D'autre part la variation de pente n'est pas rigoureusement proportionnelle à la variation de polarisation. C'est pour ces deux raisons qu'il est préférable de ne faire entrer en jeu le mécanisme détecteur que lorsque l'amplitude a atteint une valeur assez proche de l'amplitude stationnaire. Le faisceau de droites utilisé a une faible ouverture angulaire et il est facile de choisir la région où la linéarité est la meilleure.

49. Relevé de la caractéristique de grille. Vérification de la condition F. — La figure 10 représente le courant grille en fonction de la tension grille pour une lampe à chauffage in-

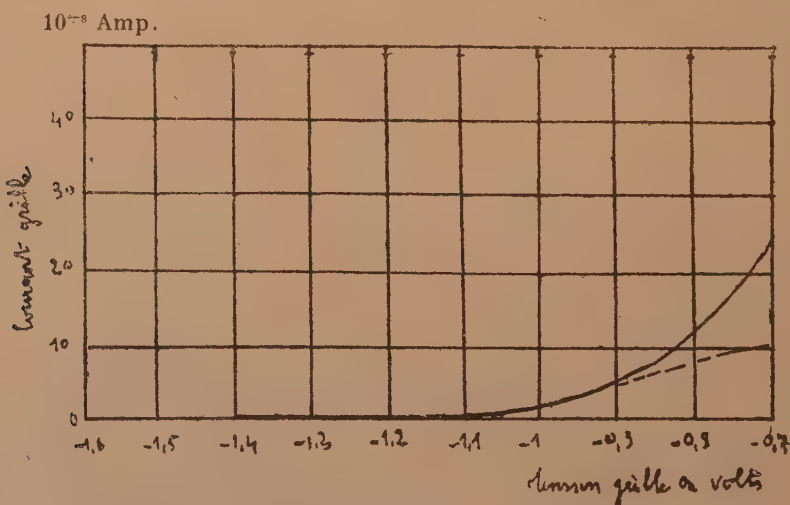


FIG. 10.

direct du type utilisé. On voit que le courant grille commence assez brusquement pour une tension de $-1v,1$ et que la pente initiale de la courbe varie peu entre $-1v,1$ et $-0v,9$. Cette pente correspond à une résistance interne de grille ρ égale à 4 mégohms. Si l'amplitude de la tension grille appliquée

à chaque lampe est de l'ordre de grandeur du volt, l'emploi d'une tension de polarisation de $-1v,5$, obtenue par l'insertion entre la prise médiane du circuit de grille et des cathodes d'un élément de pile, assure un fonctionnement conforme au principe de la détection linéaire et la condition F est vérifiée.

Pour assurer un rendement suffisant à la détection et limiter le courant moyen débité par les grilles, il convient de shunter les condensateurs par des résistances d'au moins quarante mégohms. Le rapport $\frac{R}{C}$ est alors égal à 10 et le rendement de la détection est égal à 0,65. Les condensateurs utilisés ayant une capacité de un microfarad, la constante de temps CR est de quarante secondes, ordre de grandeur acceptable étant donnée la lenteur de variation de l'amplitude.

50. Valeur des paramètres S_0 et K. — Les courbes de la fig. 9 nous permettent de déterminer S_0 et K, les derniers paramètres expérimentaux introduits par la relation (11).

S_0 , pente de la caractéristique du montage différentiel pour la tension fixe de $-1v,5$ appliquée aux grilles, a pour valeur 2 milliampères par volt, soit : 2×10^{-12} unités C.G.S.

Pour calculer K différencions la relation (11) :

$$(17) \quad K = \frac{dS}{dA(x, y)} = \frac{dS}{dV_m} \times \frac{dV_m}{dA(x, y)}.$$

La valeur de $\frac{dS}{dV_m}$ entre $-1v,5$ et $-2v$. est de $1,4 \text{ ma/v}^2$, soit $1,4 \times 10^{-10}$ C.G.S.

D'autre part, la définition de $A(x, y)$, la relation (5) et la théorie de la détection exposée ci-dessus donnent :

$$(18) \quad \frac{dV_m}{dA(x, y)} = 0,65 \times N\Phi \sqrt{\frac{2}{M + \frac{m}{3}}}.$$

De (17) et (18) on tire :

$$K = 1,12 \times 10^{-14}.$$

51. Valeur des paramètres théoriques a et b . — Ayant déterminé la valeur des paramètres expérimentaux relatifs à l'oscillateur et à son système d'entretien, nous pouvons en déduire la valeur des paramètres théoriques a et b .

Toutefois, une remarque préalable s'impose. Si on se reporte à notre étude théorique, on constate que dans la plupart des équations b ne figure qu'engagé dans le rapport $\frac{a}{b}$ qui mesure la grandeur de l'amplitude stationnaire, en sorte que a et $\frac{a}{b}$ sont les véritables constantes théoriques. La dernière disparaît même des calculs du dernier chapitre par suite de l'introduction de ε , l'*écart relatif d'amplitude*, qui est une variable *réduite*, en sorte que tout l'intérêt de la discussion se trouve reporté sur a .

Du point de vue expérimental il en va autrement. Le paramètre a n'est susceptible ni d'une mesure directe ni d'un calcul précis. La relation (9) qui le définit montre qu'il faudrait mesurer l'amortissement de l'oscillateur pour une amplitude infiniment petite et dans la formule (14), qui le relie aux paramètres expérimentaux, a est proportionnel à la différence de deux quantités dont les valeurs sont beaucoup plus élevées que la sienne.

Par contre, b peut être déterminé avec une bonne approximation à partir de la valeur de K . En portant cette valeur dans la relation (15), il vient :

$$b = 2,8 \times 10^{-7}.$$

Il suffit alors de mesurer $\frac{a}{b}$ pour en déduire a .

L'amplitude stationnaire de l'élongation étant de 0 cm. 75, on a, en la multipliant par $\sqrt{\frac{s}{2}}$:

$$\frac{a}{b} = 64,65$$

et :

$$a = 1,81 \times 10^{-8}$$

Cette valeur est beaucoup plus petite que 0,01, limite supé-

rieure que nous avons admise dans les calculs des n° 31, 32, 33. La variation de marche consécutive à une fluctuation de l'amplitude de l'ordre du dixième est, par suite, très inférieure à la limite d'un dix-millième que nous avons déduite de la valeur limite admise pour a . Nous sommes donc en droit de considérer l'influence du système d'entretien comme négligeable devant les autres causes possibles de variation de marche du pendule.

52. Schéma de montage et méthode d'équilibrage des lampes.

— La conclusion qui précède est évidemment subordonnée à la réalisation d'un équilibrage précis des courants plaque et des courants grille des deux lampes utilisées. On dispose à cet effet de deux paramètres : la tension d'écran et le courant de chauffage. Tous deux influent sur le courant plaque, mais seules les variations de chauffage influencent sensiblement le courant grille.

Une étude préalable au potentiomètre différentiel permet de choisir des lampes aussi identiques que possible et de déterminer les tensions d'écran assurant la linéarité de la caractéristique du montage différentiel, tandis que l'étude des courants grille permet de choisir les valeurs des courants de chauffage assurant l'identité des fonctions détectrices. Mais une retouche des réglages en cours de fonctionnement et un contrôle périodiquement répété sont indispensables. A cet effet des rhéostats de réglage et des appareils de mesure sont disposés suivant le schéma de la figure 11.

Le réglage des courants de chauffage est assuré par un rhéostat différentiel R_3 de quelques dixièmes d'ohm, à variation de résistance lente et continue. Deux ampèremètres en service permanent, A_1 et A_2 , contrôlent les valeurs des courants de chauffage.

Deux rhéostats R_4 et R_5 permettent d'introduire des résistances pouvant varier de 0 à 20.000 ohms sur les circuits d'écran et de modifier les valeurs des courants plaque. Un milliampèremètre A_3 , dont l'impédance est négligeable devant la résistance interne des lampes, peut être intercalé sur l'un ou l'autre des circuits plaque ou être mis hors circuit sans interruption des courants plaque par une clef double à bascule à trois positions C.

en insérant alternativement à l'aide de la clef C le milliampèremètre A_3 dans les deux circuits plaque, l'égalité d'amplitude des variations des courants plaque et on la parfait au besoin en agissant soit sur les rhéostats R_4 et R_5 , soit sur R_3 .

En coupant les grilles, ainsi qu'il a été expliqué, des circuits d'entretien et en reliant quelques instants les condensateurs shuntés à la borne négative de la pile de polarisation, on vérifie à l'aide de la clef C l'égalité des courants de repos et la constance de leur valeur commune tant que l'amplitude n'a pas atteint le seuil au delà duquel commence la fonction détectrice.

En répétant cette manœuvre pour des valeurs croissantes de l'amplitude on vérifie que les courants de repos commencent *simultanément* à décroître pour les deux lampes et de la même quantité. S'il n'en est pas ainsi, on agit *exclusivement* sur R_3 pour l'obtenir. On corrige ensuite le déséquilibre que cette manœuvre introduit dans les amplitudes de variation des courants plaque en agissant *exclusivement* sur R_4 et R_5 .

53. Détails d'installation et premiers résultats. — La figure 12 montre les détails d'installation du pendule. Deux fortes consoles de chêne sec fixées à un mur épais supportent une table de marbre à inclinaison réglable. Sur cette table est fixée par trois cales une platine rodée sur laquelle repose la cloche à vide. A cette platine sont fixées quatre colonnes supportant, par l'intermédiaire d'une plaque de laiton, un tube en laiton à l'intérieur duquel est suspendu le ressort hélicoïdal.

La platine et les colonnes sont en bakélite. Ce matériau, une fois desséché par un séjour prolongé dans le vide en présence d'acide sulfurique, possède une rigidité mécanique élevée, une faible tension de vapeur et une très faible conductibilité électrique. Il est en effet indispensable, pour éviter l'amortissement par courants de Foucault, qu'il n'y ait aucune pièce conductrice dans la région des déplacements de l'aimant. La bobine et son support sont également en bakélite.

Le dispositif d'entretien du pendule a fonctionné pendant cinq semaines, au cours desquelles a été mise au point la méthode de réglage exposée ci-dessus. La stabilité de l'amplitude a été excellente, les seules variations constatées de sa valeur stationnaire coïncidant avec les variations de la tension du

secteur, qu'atténuaient seulement des batteries tampons. Aucune influence de ces variations d'amplitude sur la période du pendule n'a pu être constatée.

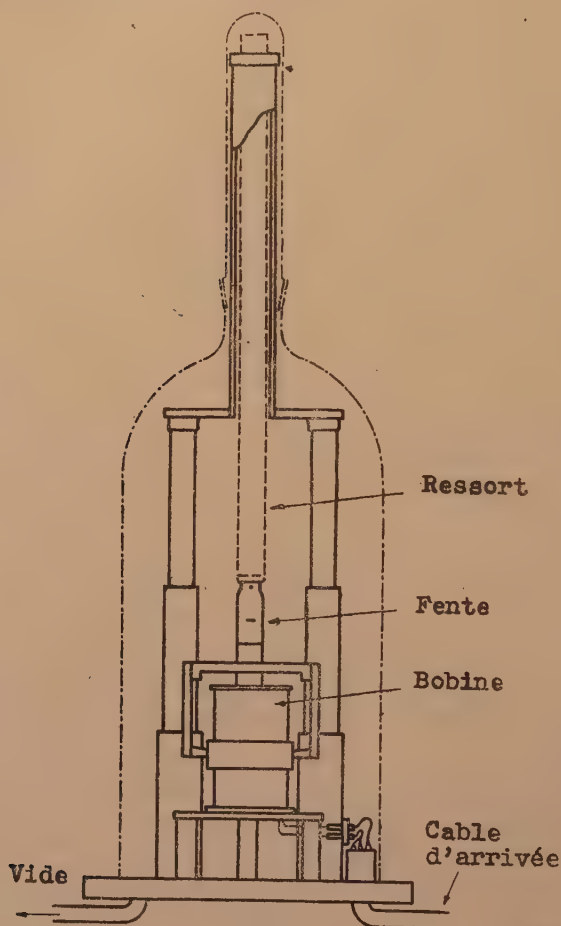


FIG. 12.

Les événements survenus depuis l'année 1939 ont interrompu ces essais qui seront repris dès que possible. Comme nous l'avons fait observer, ils devront être prolongés durant plusieurs années avant que nous puissions en tirer des conclusions intéressant directement la chronométrie. Notre but immédiat était autre et nous pensons l'avoir atteint *en montrant réalisées les hypothèses formulées dans notre étude théorique.*

LISTE DES TRAVAUX CITÉS DANS LA DEUXIÈME PARTIE

- [1] H. BOUASSE, *Cours de physique*. I^{re} Partie : *Mécanique physique*. Paris, Delagrave (S. d.).
 - [2] A. BOULANGER, *Les principes de la mécanique des ressorts*. Paris, Gauthier-Villars, 1927.
 - [3] R. MESNY, *Radio-électricité générale*. T. II, fasc. II, p. 249. Paris, Chiron, 1935
-

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ :

État actuel de la question des rayons cosmiques.

Vu et approuvé :

Paris, le 10 novembre 1942.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

P. MONTEL

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

GILBERT GIDEL

TABLE DES MATIÈRES

N°	Pages
1-7. INTRODUCTION	9-16

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE THÉORIQUE

CHAPITRE PREMIER

Fondements de la théorie non-linéaire des systèmes autoentretenus.

8. Équation fondamentale de la théorie non-linéaire.....	17
9. Interprétation géométrique	18
10. Interprétation énergétique	19
11. Équation et construction de Liénard	19
12. Autre forme de l'équation de Liénard	20
13. Équation de Van der Pol	21

CHAPITRE II

Équation aux variations d'énergie d'oscillateurs autoentretenus.

14. Équation d'un circuit oscillant « série ».....	24
15. Équation d'un circuit oscillant « shunt ».....	26
16. Adjonction de dispositifs d'entretien en série ou en dé- vation	27
17. Hypothèses sur les fonctions R et S.....	27
18. Symétries	29
19. Signification énergétique des fonctions R et S.....	30

CHAPITRE III

Définition et expression analytique de l'amplitude instantanée.

20. Définition de l'amplitude des oscillations sinusoïdales pures	33
21. Cas des oscillations sinusoïdales amorties ou modulées..	33
22. Définition de l'amplitude « instantanée » comme fonction continue des variables x et y	35
23. Détermination de la fonction $A(x, y)$	37

CHAPITRE IV

Formation de l'équation d'un oscillateur à amplitude autostabilisée.

24. Établissement et discussion d'une relation entre les coefficients R et S et l'amplitude instantanée.....	41
25. Formation de l'équation d'un oscillateur du type « série ».	43

CHAPITRE V

Étude de l'équation d'un oscillateur à amplitude autostabilisée.

26. Transformation de l'équation (32).....	44
27. Discussion de l'équation (40)	46
28. Établissement et discussion de la relation entre d^0 et dt	50
29. Autres coefficients différentiels.....	52

CHAPITRE VI

Étude des fluctuations de l'amplitude instantanée. Variante du système d'entretien.

30. Origine et effets des fluctuations de l'amplitude instantanée	53
31. Expression et ordre de grandeur de l'écart relatif d'amplitude	54
32. Loi d'évolution de l'écart relatif d'amplitude.....	55
33. Variation de phase initiale consécutive à une fluctuation de l'amplitude	57
34. Variante du système d'entretien à amplitude autostabilisée	60

SECONDE PARTIE

ÉTUDE TECHNIQUE

CHAPITRE PREMIER

Étude d'ensemble. Équations du mouvement. Conditions à réaliser.

35. Choix du type de pendule et de la fréquence.....	65
36. Description du dispositif d'entretien.....	66
37. Équation aux variations d'énergie du pendule et de son dispositif d'entretien	67

38. Relation entre le coefficient d'amortissement et l'amplitude. Identification des paramètres théoriques et des constantes expérimentales	71
39. Conditions à vérifier pour la génération d'oscillations sinusoïdales	72

CHAPITRE II

Étude du ressort.

Vérification des conditions A et B.

40. Étude statique du ressort. Valeur du coefficient s	74
41. Étude dynamique du ressort. Valeur à donner à M	75
42. Vérification des conditions A et B. Valeur du coefficient r	76

CHAPITRE III

Étude de l'aimant et des enroulements.

Vérification des conditions C et D.

43. Forme et matériaux de l'aimant	78
44. Distribution du flux d'induction. Vérification de la condition C	80
45. Étude des enroulements. Vérification de la condition D	81

CHAPITRE IV

Étude du relais à lampes et du détecteur.

Vérification des conditions E et F.

46. Propriétés du montage différentiel de deux lampes identiques à caractéristique parabolique	83
47. Rôle du détecteur. Propriétés de la détection linéaire	85
48. Tracé expérimental de la caractéristique effective du montage différentiel. Vérification de la condition E	87
49. Relevé de la caractéristique de grille. Vérification de la condition F	90
50. Valeur des paramètres S_0 et K	91
51. Valeur des paramètres théoriques a et b	92
52. Schéma de montage et méthode d'équilibrage des lampes	93
53. Détails d'installation et premiers résultats	95

